LAURENȚIU PANAITOPOL DINU ȘERBĂNESCU

PROBLEME DE TEORIA NUMERELOR ȘI COMBINATORICĂ

pentru juniori

PREFAȚĂ

Această carte s-a născut din ideea de a promova două importante ramuri ale matematicii, nedreptățite de programa școlară – gimnazială și liceală - ***teoria numerelor și combinatorica.***

Specialiștii delimitează aritmetica de teoria numerelor în funcție de metodele de investigație și demonstrație folosite. Desigur, în cazul nostru, procedeele de rezolvare a problemelor fiind cu totul elementare, cunoștințele utilizate absolut minimale, este vorba despre aritmetică, însă acest termen este folosit de obicei pentru matematica primilor ani de școală. Dorind să evităm această confuzie, am preferat termenul Teoria Numerelor.

Am optat pentru împărțirea în secțiuni după tema problemelor și nu după strategia de rezolvare, chiar dacă pentru fiecare grup de probleme există doar asemănări de suprafață. Nici în cazul combinatoricii nu s-a ținut seama de principalele direcții ale domeniului: enumerativă, existențială și constructivă, probleme din toate aceste categorii existând în fiecare din paragrafele lucrării.

Aritmetica și combinatorica, alături de geometria elementară, sunt domeniile matematicii în care accentul nu cade neapărat pe cantitatea de informație, decisive fiind raționamentele, deseori subtile, care repetate de un număr suficient de ori în contexte variate, dau șansa cititorului, matematician în formare, să abordeze cu succes aceste discipline.

Selecția problemelor – sperăm judicioasă, redactarea minuțioasă a soluțiilor au avut drept scop prezentarea ideilor și tehnicilor care apar frecvent și care oferă deschiderea către abordarea unor probleme nerutiniere.

Deși am inclus în această culegere un număr mare de probleme care au făcut obiectul concursurilor școlare de înalt nivel, cum ar fi Olimpiada Internațională de Matematică (O.I.M.), Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori (O.B.J.), barajele de selecție a loturilor olimpice, credem că aria celor cărora lectura activă a acestei cărți le este benefică este destul de mare, cuprinzând pe cei care se pregătesc ca mai devreme sau mai târziu să participe la astfel de concursuri, pe profesorii care au generozitatea de a-și sacrifica timpul pentru pregătirea viitorilor performeri în matematică, precum și pe orice adevărat iubitor de matematică.

Mulțumim domnului lect. dr. Cornel Băețica pentru lectura manuscrisului și pentru sugestiile făcute.

Menționăm că, atunci când numele autorilor problemelor ne-a fost cunoscut, am făcut precizarea la sfârșitul soluțiilor.

Martie 2003, București

Autorii

Cuprins

CAPITOLUL I TEORIA NUMERELOR

1. Numere prime, numere compuse	5	38
2. Divizibilitate	7	43
3. Pătrate perfecte	9	49
4. Ecuații cu două necunoscute	12	56
5. Ecuații cu mai multe necunoscute	14	61
6. Numere raționale, numere iraționale	16	71
7. Diverse	19	77

CAPITOLUL II COMBINATORICĂ

1. Puncte pe circumferință	22	83
2. Tabla de șah (și nu numai ...)	25	92
3. Probleme cu numere	28	100
4. Combinatorică ... geometrică	31	106
5. Diverse	35	119

1 CAPITOLUL I

TEORIA NUMERELOR

1. NUMERE PRIME, NUMERE COMPUSE

1. Fie $p<q<r$ astfel încât numerele p,q,r, $p+q+r$, $\frac{p+q}{2}$, $\frac{q+r}{2}$, $\frac{r+p}{2}$ sunt prime. Să se afle p.

2. Să se afle cel mai mare n cu proprietatea că există n numere întregi mai mari ca 2 astfel încât suma oricăror trei dintre ele este număr prim.

3. Să se arate că există o infinitate de numere prime de forma $4k-1$ și o infinitate de numere prime de forma $6k-1$.

4. Fie p număr prim, $p \geq 5$. Să se arate că numărul $\frac{p^2+2}{3}$ se scrie ca sumă de trei pătrate de numere întregi.

5. Să se determine numerele naturale care nu pot fi scrise ca sumă a două numere compuse.

6. Fie a și n numere naturale astfel încât $a,n \geq 2$ și a^n-1 este prim. Să se arate că $a=2$ și n este prim.

7. Pentru a și n întregi $a \geq 1$, $n \geq 2$ să se arate că numărul

$$b=(1+a+a^2+\ldots+a^n)^2-a^n$$

este compus.

8. Să se determine n pentru care toate numerele $n,n+4,n+6,n+10,$ $n+12,n+16,$ $n+22$ sunt prime.

9. Dacă p și q sunt prime și a este natural, $a^2=p^2+q^2+1$ atunci a este prim.

10. Știind că numerele naturale a, b, c și $a^4+b^4+c^4-3$ sunt prime, să se arate că numărul $a^2+b^2+c^2-1$ este prim.

11. Există numerele prime distincte p, q, r astfel ca $p^2+10 \vdots qr$, $q^2+10 \vdots pq$ și $r^2+10 \vdots pq$? Dar dacă 10 se înlocuiește cu 11 ?

Turneul Orașelor, Juniori, 1[illegible].

12. Să se arate că există o infinitate de numere naturale a astfel ca pentru orice număr natural $n > 1$, numărul $x_n = n^4 + a$ este compus.

O.I.M.,1969

13. Să se arate că există o infinitate de numere naturale a astfel încât numerele $M_1 = n^3 + 4n + a$ și $M_2 = n^2 + 3n + a$ să fie compuse pentru orice n natural.

14. Fie a, b numere naturale nenule. Dacă numerele $m = a^4 + 4^b$ și $n = b^4 + 4^a$ sunt prime atunci $a = b = 1$.

15. Fie $n \geq 2$. Să se arate că $n!$ se divide cu $1+2+3+...+n$ dacă și numai dacă $n + 1$ este compus.

16. Arătați că oricare ar fi $n > 1$ cel mult 4 dintre numerele $n+1$, $n+2$,... ...,$n+12$ sunt prime.

17. Dacă $n = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 6d^2$, cu a, b, c, d numere întregi nenule și $ab = 3cd$, să se arate că n este compus.

18. Să se arate că în șirul 7, 37, 337, 3337, ... există o infinitate de numere compuse.

19. Fie numărul $x_n = 101010...1$ cu n cifre 1. Să se determine numerele n pentru care x_n este prim.

Concurs Africa de Sud, 2001

20. Să se determine numerele naturale nenule a, b, c, d dacă $ad = bc$ și numerele $a - b + c - d$, $a + d$, $b + c$ sunt prime.

21. Să se arate că numărul $n = 1.280.000.401$ este compus.

22. Să se determine cel mai mic număr natural a astfel încât pentru orice $n \in \overline{0,9}$ numerele $x_n = 210n + a$ să fie prime.

23. Să se determine numărul prim p dacă $32p + 1$ este cub perfect. Să se arate că există o infinitate de numere naturale k pentru care $2^k p + 1$ nu este cub perfect pentru nici un număr prim p.

24. Fie $\pi(x)$ numărul numerelor prime care nu îl depășesc pe x și n număr întreg $n \geq 2$.

a) Să se arate că $\pi(n!+2n) + \pi(n) \leq \pi(n!+n) + \pi(2n)$.

b) Avem $\frac{\pi(n)}{n} > \frac{\pi(n-1)}{n-1}$ dacă și numai dacă n este prim.

25. Fie $(p_n)_{n\geq 1}$ șirul numerelor prime. Să se arate că oricare ar fi m există n astfel încât $p_{n+1} - p_n > m$.

26. Găsiți întregii $n \geq 2$ pentru care toate numerele naturale care se scriu cu $n-1$ cifre 1 și o cifră 7 sunt prime.

Propusă O.I.M., 1990

27. Să se arate că în șirul $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \ldots, 2^n - 1, \ldots$ există 2003 termeni consecutivi care sunt numere compuse.

28. Descompuneți numărul $5^{1985} - 1$ în trei factori mai mari ca 5^{100}.

Propusă O.I.M., 1985

2. DIVIZIBILITATE

29. Fie a şi n două numere naturale şi $d = (a,n)$. Să se arate că dintre elementele mulțimii $A = \{ak \mid 1 \leq k \leq n\}$ exact d se divid cu n.

30. Să se arate că oricare ar fi n natural $2^n + 1$ nu se divide cu 23.

31. Să se determine cel mai mic număr natural a astfel ca numărul $N = a^{2n+1}2^{n+2} + 3^{n+2}2^{2n+1}$ se divide cu 19 pentru orice n natural.

2. Să se arate că dacă n este număr natural și $n \geq 2$ atunci numărul $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ nu este întreg.

33. Fie numerele naturale a și b pentru care $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1335}$. Să se arate că a se divide la 2003.

34. Fie numerele naturale a, b, c cu $1 \leq a < b < c$. Să se arate că printre oricare $2c$ numere naturale consecutive există numerele distincte x, y, z astfel încât numărul abc divide numărul xyz.

Baraj Moldova, 2001

35. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_1 = 2$ iar pentru $n \geq 1$, a_{n+1} este cel mai mare divizor prim al numărului $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + 1$. Să se arate că 5 nu se află în șir.

36. Fie șirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 \geq 1$, iar pentru $n \geq 1$, a_{n+1} este produsul factorilor primi ai lui $a_n + 1$. Să se arate că 2 se află în șir.

37. Fie un șir de nu mere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$. Dacă a_1 are șase cifre şi pentru orice $n \geq 1$, a_{n+1} este un divizor p rim al lui $a_n + 1$ să se calculeze $a_{19} + a_{20}$.

38. Pentru $n = 0,1,$ ...,1999, A_n este definit prin $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Găsiți cel mai mare divizor comu n al numerelor $A_0, A_1, ..., A_{1999}$.

O.B.J., 1999

39. Să se determine $a \in \mathbb{N}^*$ dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ se divide cu $a^n + 2^n + 1$.

40. Fie a și b natur ale, $b > 2$. Să se arate că numerele $\frac{2^a + 1}{2^b - 1}$ și $\frac{2^a - 1}{2^b + 1}$ nu sunt întregi.

41. Dacă a, m, n su nt numere întregi, $a > 1$, $m > 0$, $n > 2$ să se arate că $a^n - 1$ nu divide pe $a^m + 1$.

42. Dacă a, b, c, d sunt numere naturale, să se arate că numărul $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$ nu este u număr natural nenul.

43. Fie a, b nume re naturale și $m = [a,b]$. Avem $a^a + b^b > m^m$ dacă și numai dacă $a \mid b$ sau $b \mid a$.

44. Dac ă n este nat ural să se arate că numărul $4^{2^n+1} - 1$ nu se divide cu 257.

45. Să se arate că oricare ar fi m și n naturale numărul $2002^m + 2003$ nu divide pe 2146^n.

46. Dacă a și b sunt numere întregi nenule, să se determine întregii n, pentru care num ărul $\frac{n+a}{b} + \frac{n+b}{a}$ este întreg.

47. Fie numerele întregi a și b. Se arată că există întregii A și B astfel încât pentru orice număr întreg n, $an + A$ și $bn + B$ sunt prime între ele.

Propusă O.I.M., 1984

48. Dacă a, b, c sunt numere naturale și $(a,b) = 1$ atunci numerele $A = \frac{c^2}{a+c}$ și $B = \frac{c^2}{b+c}$ nu sunt ambele în tregi.

49. Fie a, b, n num ere întregi $a,b \geq 1, n \geq 2$. Să se arate că există numărul natural x astfel încât $\frac{ab + x^n}{a+b+x}$ să fie întreg.

50. Să se arate că pentru k impar și n natural, $1^k+2^k+\ldots+n^k \vdots 1+2+3+\ldots+n$.

51. Dacă a, b, c, m, n, p sunt numere naturale nenule cu $a^m \mid b^n$, $b^p \mid c^m$, $c^n \mid a^p$ și $b=72$, să se calculeze a și c.

52. Să se arate că dacă $n \geq 1$ atunci numărul $10^{3n+1}+4(-1)^n$ are mai mult de 10 divizori supraunitari.

53. Fie numărul real $a \geq 1$ astfel încât pentru ori ce pereche (m, n) cu $m \vdots n$ rezultă $[ma] \vdots [na]$. Să se arate că a este natural.

Iberoamerican, 1996

54. Dacă n este un număr natural și $n+1$ se divide cu 24 atunci suma divizorilor lui n se divide cu 24.

Concurs Putnam, 1969

55. Fie p și q două numere prime distincte. Să se arate că există numerele naturale nenule a și b astfel încât media aritmetică a divizorilor numărului $n=p^aq^b$ să fie număr întreg.

Baraj O.B.J., 2002

56. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 144 de divizori și se divide cu 10 întregi consecutivi.

Propusă O.I.M., 1995

57. Găsiți numerele naturale N cu proprietățile
i) N are exact 16 divizori $1=d_1<d_2<\ldots<d_{16}=N$.
ii) $d_{d_5}=(d_2+d_4)d_6$.

O.B.J., 2002

3. PĂTRATE PERFECTE

58. Să se determine numerele n pentru care $1!+2!+\ldots+n!$ este pătrat perfect.

59. Arătați că $\underbrace{11\ldots1}_{1997}\underbrace{22\ldots2}_{1998}5$ este pătrat perfect.

O.B.J., 1998

60. Să se arate că numărul $\underbrace{44\ldots4}_{2n}-\underbrace{88\ldots8}_{n}$ este pătrat perfect.

61. Să se arate că numărul $\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}5+1$ este pătrat perfect.

62. Fie n număr natural. Să se arate că resturile împărțirii lui $10^n - 1$ la 37 sunt pătrate perfecte.

63. Să se arate că $13^n + 2$ este număr compus dar nu este pătrat sau cub perfect.

64. Dacă a și b sunt numere naturale nenule atunci numerele $a^2 + 4b$ și $b^2 + 4a$ nu sunt ambele pătrate perfecte.

65. Să se determine numerele întregi $n \geq 2$ pentru care în intervalul $(n^3, 2n^3)$ există mai puțin de n pătrate perfecte.

66. Să se arate că dacă ultimele patru cifre ale unui pătrat perfect sunt egale, atunci ele sunt 0.

Baraj O.B.J., 2002

67. Să se arate că nu există pătrate perfecte mai mari ca 9 cu toate cifrele identice.

68. Să se determine k știind că pentru orice n, numărul $1^k + 2^k + ... + n^k$ este pătrat perfect.

69. Găsiți toate numerele naturale $n \geq 1$ știind că $n^2 + 3^n$ este pătratul unui număr întreg.

O.B.J., 2000

70. Fie $(F_n)_{n\geq 0}$ șirul lui Fibonacci, $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pentru orice $n \geq 0$. Să se arate că dacă n este par atunci $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{k+1}$ este pătrat perfect.

71. Să se arate că există o infinitate de numere naturale care nu pot fi scrise ca sumă de trei pătrate de numere întregi.

72. Să se arate că dacă n se scrie în două moduri ca sumă de pătrate atunci n este compus.

73. Dacă a, b, c sunt întregi și b este media aritmetică a lui a și c atunci $a^2 + b^2 + c^2$ nu este pătrat perfect.

74. Arătați că întregii a și b au aceeași paritate dacă și numai dacă există întregi c și d astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$.

75. Să se arate că produsul a trei sau patru numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

76. Să se arate că produsul a cinci numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

77. Să se arate că produsul a 8 numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

78. Să se arate că există o infinitate de triplete de numere naturale consecutive care se scriu ca sume de pătrate de numere întregi.

79. Fie $x_k = \frac{k(k+1)}{2}$, $n \geq k$, $A = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}$, $B = A + x_n$. Demonstrați că între A și B există cel puțin un pătrat perfect.

Propusă O.B.J., 2000

80. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există n numere naturale astfel încât suma oricărora dintre ele nu este pătrat perfect.

81. Să se arate că există o infinitate de numere naturale a, b, c care îndeplinesc condițiile:
1) $b = \frac{a+c}{2}$; 2) $a+b, b+c, c+a$ sunt pătrate perfecte; 3) $(a,b,c) = 2$.

82. Trei elevi scriu pe rând câte un număr de două cifre pătrat perfect. La sfârșit ei constată că numărul de 6 cifre astfel obținut, este de asemenea pătrat perfect. Ce număr au obținut elevii ?

Baraj O.B.J., 2000

83. Dacă x, y, z sunt numere naturale și $x^2 + y^2 + z^2 = 1993$ să se arate că $x + y + z$ nu este pătrat perfect.

Baraj, 1993

84. Fie a, b, c, d, m, n întregi strict pozitivi astfel ca

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1989$$
$$a + b + c + d = m^2$$

și cel mai mare dintre numerele a, b, c, d este n^2. Determinați m și n.

Propusă O.I.M., 1989

85. Fie numerele naturale a, b, c și $E(n) = a^2n^2 + bn + c$. Dacă c nu este pătrat perfect atunci există un număr finit de numere naturale n pentru care $E(n)$ este pătrat perfect.

86. Să se arate că există o infinitate de pătrate perfecte în scrierea cărora se folosesc toate cifrele 0, 1, 2, ..., 9.

87. Fie x, y numere naturale nenule. Să se arate că x^2+y^2 și xy nu sunt ambele pătrate perfecte.

88. Fie $n \geq 2$. Să se determine pătratele perfecte cu n cifre dintre care $n-1$ sunt 5.

89. Să se arate că există o infinitate de numere naturale N ale căror pătrate se termină cu cifrele lui N.

4. ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE

90. Există numere întregi a și b astfel ca $4a^3-7b^3=2003$?

91. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^2-2^y=2021$.

92. Să se arate că ecuația $3x^4+4=y^4$ nu are soluții în numere naturale.

93. Să se rezolve în numere întregi ecuația $y^2=x^4+x^3+x^2+x+1$.

94. Determinați numerele prime p și q dacă $p+q=(p-q)^3$.

Concurs Rusia, 2001

95. Să se rezolve în numere întregi ecuația $\frac{x^3-y^3}{(x-y)^2}=7$.

96. Fie x, y numere întregi astfel încât $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$. Să se calculeze $x+y$.

O.B.J., 2000

97. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2)=y^{2^x}.$$

Baraj O.B.J., 2000

98. Găsiți numerele naturale a și b dacă $\frac{a^3+1}{b^2}$ și $\frac{b^3+1}{a^2}$ sunt întregi.

99. Determinați numerele naturale nenule a și b dacă numerele $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ și $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ sunt întregi.

Concurs Asia Pacific, 2002

100. Să se rezolve în numere naturale ecuația $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$.

Baraj O.B.J., 2000

101. Să se rezolve în numere naturale ecuația $3^x + 4^x + 5^x = 6^y$.

102. Fie k și n numere naturale cu $n > 2$. Să se arate că ecuația $x^n - y^n = 2^k$ nu are soluții în numere naturale nenule.

O.N.M., 2001

103. Fie m și n numere întregi cu $m,n > 1$. Să se rezolve în numere întregi ecuația $x^n + y^n = 2^m$.

Baraj O.B.J., 2002

104. Dacă p este prim și $2^p + 3^p = m^k$ să se arate că $k = 1$.

105. Să se rezolve în numere naturale $|3^x - 2^y| = 1$.

106. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^y = y^{x-y}$.

O.B.J., 1996

107. Să se arate că ecuația $x^2 - 3y^2 = 1$ are o infinitate de soluții, iar ecuația $x^2 - 3y^2 = -1$ nu are soluții.

108. Să se arate că ecuațiile $x^2 - 2y^2 = 1$ (1) și $x^2 - 2y^2 = -1$ (2) au câte o infinitate de soluții.

109. Dacă (x_0, y_0) este soluție pentru ecuația $x^2 - Dy^2 = 1$ (1) și (u, v) este soluție pentru ecuația $x^2 - Dy^2 = k$ (2), să se arate că (X,Y) cu $X = x_0u + Dy_0v$ și $Y = x_0v + y_0u$, este de asemenea soluție pentru ecuația (2). Să se deducă de aici că ecuația $x^2 - 7y^2 = 2$ (3) are o infinitate de soluții.

5. ECUAȚII CU MAI MULTE NECUNOSCUTE

111. Să se arate că ecuația $x^2+y^2-z^2=1$ are o infinitate de soluții în numere naturale.

112. Să se arate că pentru orice n întreg ecuația $x^2+y^2-z^2=n$ are o infinitate de soluții în numere întregi.

113. Să se arate că ecuația $x^3+y^3+z^3=4$ nu are soluții în numere întregi.

114. Găsiți numerele naturale a, b, c astfel ca $a^3+b^3+c^3=2001$.

O.B.J., 2001

115. Să se arate că ecuația $x^3+y^3+z^3=2$ are o infinitate de soluții în numere întregi.

116. Să se determine numerele întregi nenule x, y, z dacă $(x,y,z)=1$ și $2x+y=3z$, $x^3+2y^3=3z^3$.

Baraj, 1969

117. Să se arate că ecuația $x^2+y^3=z^4$ are o infinitate de soluții în numere naturale.

118. Să se arate că pentru orice $n\geq 1$ întreg, ecuația

$$(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+n)^3=y^3$$

are cel puțin o soluție în numere întregi.

119. Să se determine numerele naturale a, b, c știind că $\frac{ab+1}{c}$, $\frac{ca+1}{b}$ și $\frac{bc+1}{a}$ sunt de asemenea naturale.

120. Să se rezolve în numere naturale ecuația $|abc-a-b-c|=2$.

121. Determinați sistemele ordonate de numere raționale pozitive (x,y,z) știind că $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$ și $z+\frac{1}{x}$ sunt întregi.

122. Dacă numerele a, b, c, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ sunt întregi să se arate că $|a|=|b|=|c|$.

Turneul Orașelor, Juniori

123. Să se rezolve în numere întregi sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$.

124. Fie m număr natural. Să se arate că ecuația $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m$ admite soluții numere întregi prime două câte două dacă și numai dacă $m=3$.

125. Să se rezolve în numere întregi ecuația $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$.

126. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^2+y^2=z^2$.

127. Dacă x, y, z sunt numere întregi pentru care $(x,y)=1$ și $x^4-y^4=z^2$ atunci $x=\pm 1$.

128. Dacă x, y, z sunt numere întregi și $x^4+y^4=2z^2$, $(x,y)=1$ atunci $x=\pm 1$ și $y=\pm 1$.

129. Fie a, b, c numere întregi astfel ca $a^4+b^4=c^2$. Să se arate că $a=0$ sau $b=0$.

130. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea a, catetele au lungimile b și c iar a, b, c sunt numere naturale. Dacă $b+c$ este o sumă de două pătrate să se arate că și b^3+c^3 este sumă de două pătrate.

131. Să se arate că ecuația $x^3+y^3=z^2$, $(x,y)=1$ are o infinitate de soluții în numere întregi.

132. Fie n natural impar, $n\geq 3$. Să se arate că ecuația $x^n+y^n=z^n$ nu are soluții în numere naturale dacă $x+y$ este număr prim.

133. Să se determine numerele naturale a, b, c, d dacă

$$a+b+c+d-3=ab=cd.$$

Baraj O.B.J., 2002

134. Să se rezolve în numere naturale ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1.$$

135. Determinați întregii a, b, c, d dacă $1\leq a<b<c<d$ cu proprietatea că fiecare divide suma celelalte trei.

Baraj O.B.J., 2001

136. Pentru n natural dat, să se rezolve în numere naturale ecuația

$$a^2+b^2+c^2+d^2=7\cdot 4^n.$$

Baraj O.B.J., 2001

137. Să se arate că ecuația $x^6+y^6+z^4=t^4$ are o infinitate de soluții în numere întregi cu $(x,y,z,t)=1$.

138. Să se determine soluțiile în numere naturale ale ecuației

$$(x+y)(y+z)(z+x)=xyzt \text{ dacă } (x,y)=(y,z)=(z,x)=1.$$

Baraj, 1995

139. Să se arate că ecuația $x^2+y^2+z^2+t^2=xyzt$ are o infinitate de soluții în numere întregi.

140. Dacă a, b, c, d, e, f sunt numere întregi sunt numere întregi cu $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6+f^6=6abcdef+1$ atunci cinci dintre numere sunt 0.

Turneul Orașelor, Juniori, 1994

141. Pentru $n\geq 3$ să se arate că există n numere naturale distincte cu suma inverselor 1.

142. Să se determine n minim pentru care există numerele naturale $x_1,x_2,...,x_n$ astfel ca $x_1^4+x_2^4+...+x_n^4=1998$.

Baraj O.B.J., 2000

143. Arătați că pentru orice $n\geq 1$ există n numere întregi pentru care suma este egală cu produsul.

144. Să se afle numărul sistemelor de numere întregi $(x_1,x_2,...,x_n)$ dacă

$$x_1+x_2+...+x_n=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2.$$

145. Să se arate că există numerele întregi nenule $x_1,x_2,...,x_{2003}$ astfel ca $x_1^3+x_2^3+...+x_{2003}^3=x_1x_2...x_{2003}$.

6. NUMERE RAȚIONALE, NUMERE IRAȚIONALE

146. Să se arate că numărul $n=2,1221222122221...$ este irațional.

147. Să se afle primele 2001 zecimale ale numărului $\sqrt{0,\underbrace{11...1}_{2001}}$.

148. Fie n un număr natural în scrierea căruia cifrele 2 și 5 apar de câte cinci ori, restul cifrelor fiind 0.

Să se arate că $\sqrt{n}$ este irațional.

149. Să se arate că nu există un număr finit de numere raționale $r_1, r_2, ..., r_n$ astfel că pentru orice număr rațional a să existe numerele întregi $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel ca

$$a = x_1 r_1 + x_2 r_2 + ... + x_n r_n .$$

150. Fie a_1 număr natural. Să se arate că în șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_{n+1} = \sqrt[3]{1 + a_n^3}$ există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

151. Fie numerele întregi $1 \leq q \leq p$. Să se arate că numărul $a = \left(p + \sqrt{p^2 + q}\right)^2$ este irațional și are partea fracționară mai mare ca 0, 75.

152. Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ nu are soluție în numere raționale.

153. Să se arate ecuația $x^2 + xy + y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în numere raționale.

154. Dacă n este număr natural divizibil cu 3, să se arate că ecuația $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n$ nu are soluții în numere raționale pozitive.

155. Să se arate că 2 se poate scrie într-o infinitate de moduri ca sumă a patru pătrate de numere raționale distincte.

156. Fie k, n naturale astfel încât $\sqrt[k]{n}$ este rațional. Să se arate că există numărul natural a astfel că $n = a^k$. Ca aplicație să se determine m astfel încât $\sqrt{m! + 2}$ să fie rațional.

157. Să se determine numerele întregi n pentru care numărul $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ este rațional.

Baraj O.B.J., 2001

158. Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$ atunci există $x,y\in\mathbb{Q}$ astfel ca $a=x^2,b=y^3$. *Aplicație.* Să se arate că numărul $\sqrt{n+2}+\sqrt[3]{3n}$ este irațional.

159. Dacă x este număr real să se arate că numerele $\sqrt{3-x^2}$ și $\sqrt[3]{3-x^3}$ nu sunt ambele raționale.

Baraj O.B.J., 2002

160. Să se arate că dacă a, b, c și $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sunt numere raționale atunci numerele $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$ sunt de asemenea raționale.

161. Să se arate că dacă a, b, c, d și $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ sunt numere raționale atunci numerele $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{d}$ sunt de asemenea raționale.

162. Fie a și b numere raționale ($a > b > 0$). Să se arate că $\sqrt{a}+\sqrt{b}+$ $+\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ este irațional.

163. Fie m și n numere naturale. Dacă $\sqrt{7}>\frac{m}{n}$ să se arate că $\sqrt{7}>\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}$.

164. Dacă m și n sunt numere naturale să se arate că $\left|\sqrt{2}-\frac{m}{n}\right|>\frac{1}{3n^2}$.

165. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ conține o infinitate de numere iraționale.

166. Să se determine numerele reale x pentru care numerele $\frac{2x^2+1}{x-3}$ și $\frac{3x^2-1}{3x-5}$ sunt ambele raționale.

167. Știind că numerele x și y sunt iraționale iar xy, x^2+y și y^2+x sunt raționale, să se calculeze $x+y$.

168. Arătați că ecuația $x(x+1)=4y(y+1)$ nu are soluții în numere naturale nenule dar are o infinitate de soluții în numere raționale.

169. Să se arate că orice interval $(a,b)\in[0,1]$ conține o infinitate de numere $\{\sqrt{n}\}$ unde $\{\sqrt{n}\}=\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ cu $n\in\mathbb{N}$.

7. DIVERSE

170. Să se arate că fiecare dintre numerele $\frac{107811}{3}$, $\frac{110778111}{3}$, $\frac{111077781111}{3}$, ... este cubul unui număr natural.

171. Fie numerele naturale a și b cu $a > b \geq 1$. Notăm cu C și R câtul și restul împărțirii lui na la $a - b$. Să se afle câtul și restul împărțirii lui nb la $a - b$.

Baraj, 1970

172. Să se arate că orice număr întreg $n > 6$ se reprezintă sub forma $n = a + b$ cu a, b întregi $a, b \geq 2$ și $(a, b) = 1$.

173. Fie a, b, c numere întregi nenule astfel încât ab, bc, ca sunt cuburi perfecte. Să se arate că a, b, c sunt de asemenea cuburi perfecte.

174. În ce bază numărul 297 este divizor al lui 792 ?

175. Să se determine n dacă numărul n^n are n cifre.

176. Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 1$ notăm cu a_n ultima cifră a numărului n^n. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este periodic.

177. Pentru numărul n notăm $s(n)$ suma cifrelor sale. Să se arate că ecuația $s(x^2) + s(y^2) = s(z^2)$ are o infinitate de soluții.

178. Să se arate că nu există o putere a lui 2 astfel încât permutându-i cifrele să se obțină o altă putere a lui 2.

Concurs Iran, 2001

179. Fie o mulțime de numere întregi $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. Să se arate că există o submulțime a sa cu suma elementelor divizibilă cu n.

180. Se consideră 51 de numere naturale mai mici ca 100. Să se arate că există două astfel încât unul se divide cu celălalt.

181. Să se arate că orice număr natural n, $(n, 10) = 1$ are un multiplu format doar cu cifra 1.

182. Din șirul $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{(n-1)n}, \ldots$ să se determine grupul de termeni consecutivi a căror sumă este $\frac{1}{3}$.

183. Din numărul 123456789101112...9899100 să se elimine 20 cifre astfel încât numărul rămas să fie maxim.

Baraj O.I.M., 1968

184. Să se arate că pentru $n \geq 2$ avem $\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

185. Să se arate că un număr format din 2^n cifre identice are cel puțin n factori primi distincți.

186. Să se afle numerele m și n dacă suma numerelor mai mari ca m și mai mici ca n, este 1000.

Baraj O.I.M., 1968

187. Dacă a este un număr rațional și $a > 1$ atunci există numerele naturale m și n astfel ca $a = \left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m^2+n}\right)$.

188. Găsiți toate numerele întregi n pentru care mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ se poate scrie ca o reuniune de mulțimi disjuncte A, B, C astfel încât suma elementelor fiecăreia să fie aceeași.

Concurs Iran, 2001

189. Pentru $a \in \mathbb{N}$ considerăm mulțimea $A = \left\{n \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{2^a}{3x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Găsiți numărul elementelor mulțimii A.

Baraj O.B.J., 2000

190. Pentru orice pereche de întregi a, b se poate găsi un întreg c astfel încât mulțimile $M_1 = \{x^2 + ax + b, x \in \mathbb{Z}\}$, $M_2 = \{2x^2 + 2x + c, x \in \mathbb{Z}\}$ sunt disjuncte.

Propusă O.I.M., 1995

191. Să se arate că produsul a n numere naturale consecutive nu este puterea n a unui număr natural.

192. Să se arate că dacă primele două cifre ale lui 2^n sunt aceleasi cu primele două cifre ale lui 5^n acestea sunt 3 și 1.

193. Determinați toate numerele naturale $n > 0$, pentru care există numerele naturale a și b cu $S(a) = S(b) = S(a+b) = n$ unde $S(k)$ este suma cifrelor lui k.

Baraj O.B.J., 2000

194. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*, k \leq 1999$ notăm $S_1(k)$ suma resturilor împărțirii numerelor 1, 2, ..., k prin 4 și cu $S_2(k)$ suma resturilor împărțirilor numerelor $k+1, k+2, ..., 2000$ prin 3. Arătați ca există un unic $m, 1 \leq m \leq 1999$ astfel ca $S_1(m) = S_2(m)$.

Baraj O.B.J., 2000

195. Pentru $p \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $A_n(p)$ mulțimea întregilor px cu $x \in \mathbb{R}$ și $n-1 < x \leq n$. Pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat determinați numerele reale b astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(a)$ și $A_n(b)$ au același număr de elemente.

Baraj O.B.J., 2002

196. Fie $n > 2$. Să se calculeze suma $\sum \frac{1}{ab}$, care se face după toate perechile (a, b) cu $1 \leq a < b \leq n$ și $(a,b) = 1$.

Iberoamerican, 1995

197. Fie numerele naturale $n, a_1, a_2, ..., a_k$ astfel încât $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k < n$ și pentru orice $1 \leq i < j \leq k$ avem $[a_i, a_j] > n$. Să se arate că $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} < 2$.

198. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere naturale pentru care oricare ar fi $n \geq 1$, a_{n+1} este cel mai mare divizor prim al lui $a_n + n$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit.

199. Fie $a, b, c, d > 1$ numere naturale. Dacă pentru orice y natural există x natural cu $a^x + b^x = cd^y$ atunci $a = b$.

200. Să se arate că un număr natural n se scrie ca sumă a trei pătrate de numere întregi dacă și numai dacă $4n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ cu $a + b = c + d$.

2 CAPITOLUL II
COMBINATORICĂ

1. PUNCTE PE CIRCUMFERINȚĂ

1. Se pot scrie numerele de la 1 la 2002 pe circumferința unui cerc astfel încât diferența pozitivă a două numere vecine să fie cel mult egală cu 2 ?

2. Putem aranja numerele 1, 2, 3, ..., 11 pe un cerc astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un număr prim ? Dar numerele 1, 2, 3, ..., 16 ?

3. La o masă circulară sunt așezate 7 persoane. Vârsta fiecăreia este media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate.

Arătați că suma vârstelor tuturor persoanelor este multiplu de 7.

O.N.M., 1994

4. La o masă circulară sunt 8 jucători. La un moment dat se constată că fiecare jucător împreună cu cei doi vecini ai săi au în total un număr impar de fise câștigătoare. Să se arate că fiecare jucător are cel puțin o fisă câștigătoare.

O.N.M., 2002

5. Să se arate că numerele 1, 2, 3, ..., 16 nu pot fi aranjate pe o circumferință astfel încât suma oricăror două numere consecutive să fie pătrat perfect.

Este posibilă o astfel de aranjare pe o linie ?

Olimpiadă Rusia

6. Pe o circumferință sunt scrise în ordine numerele:

1, 2, 3, 4, 5, ..., 2003.

Unele dintre acestea se elimină după următorul procedeu: tăiem 1, sărim un număr; tăiem 2 numere, sărim 2 numere; tăiem 3 numere, sărim 3 numere ș.a.m.d, până când rămân mai puține numere decât ar trebui tăiate. Câte numere au rămas?

7. Pe o circumferință sunt scrise în ordine numerele

1, 2, 3, ..., 2002.

Se taie pe rând numerele 1, 11, 21, 31, ... și continuăm să tăiem din 10 în 10 – numerele eliminate se iau în considerare – până când ar urma să tăiem din nou un număr deja tăiat. Câte numere mai rămân netăiate ?

8. La o masă circulară se așează 5 băieți și 5 fete.

Să se arate că există o persoană – băiat sau fată – care este așezată între două fete.

9. Vârfurile unui heptagon regulat sunt colorate cu roșu sau albastru. Să se arate că putem alege 3 vârfuri de aceeași culoare care să formeze un triunghi isoscel.

10. Pe o circumferință se scriu 2003 numere cu proprietatea că modulul diferenței a oricăror două numere vecine este constant.

Să se arate că toate numerele sunt egale.

11. Pe un cerc se consideră 2003 puncte colorate cu roșu și un punct colorat cu albastru. Considerăm toate poligoanele având vârfurile în mulțimea punctelor date.

Decideți dacă sunt mai multe poligoane având toate vârfurile în punctele colorate cu roșu sau mai multe poligoane având un vârf în punctul colorat cu albastru.

12. Pe o circumferință sunt scrise 108 numere, astfel încât suma oricăror 20 de numere consecutive să fie egală cu 1000.

Dacă primul număr este 1, al 19-lea este 19 și al 50-lea este 50, cât este al 100-lea ?

Olimpiadă Bulgaria

13. Pe o circumferință se scriu n numere egale cu 1 sau –1. Se formează toate cele n produse a două numere vecine.

Să se arate că dacă suma acestor produse este nulă, atunci n se divide cu 4.

14. La o masă circulară sunt așezate n persoane. Se constată că numărul persoanelor ce au același sex ca al persoanelor din dreapta lor este egal cu cel al persoanelor pentru care această condiție nu este valabilă.

Să se arate că n se divide cu 4.

15. Pe o circumferință se colorează 2002 puncte cu două culori. Un arc se numește bicolor dacă are capetele diferit colorate.

Să se arate că dintre cele 2002 arce determinate de două puncte consecutive dintre cele 2002, numărul celor bicolore este par.

16. Pe o circumferință sunt scrise 100 de numere astfel încât orice număr mărit cu 1 să fie egal cu suma vecinilor săi. Să se afle aceste numere.

17. Pe o circumferință sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 19, 20. Doi jucători șterg, pe rând, câte 3 numere. Dacă ultimele 2 numere rămase sunt vecine, primul jucător pierde; în caz contrar, câștigă.

Găsiți strategia câștigătoare pentru al doilea jucător.

Olimpiadă Belarus

18. Pe o circumferință sunt marcate 9 puncte. Două persoane unesc pe rând 2 puncte – neunite la acel moment. Câștigă cel care trasează segmentul ce unește ultimul punct ce nu fusese unit. Găsiți strategia câștigătoare pentru primul jucător.

19. Pe un cerc sunt scrise în ordine numerele de la 1 la 2003. Un elev sare primul număr – 1 –, îl șterge pe al doilea – 2 –, îl sare pe următorul – 3 –, îl șterge pe următorul și continuă până rămâne cu un singur număr. Care este acesta ?

20. Pe o circumferință se scriu într-o ordine arbitrară patru de 1 și cinci de 0. Apoi, în intervalul dintre două numere egale se scrie 0 iar între două diferite se scrie 1, iar primele cifre se șterg; astfel se obțin din nou 9 cifre.

Să se arate că ori de câte ori am repeta procedeul nu se pot obține 9 cifre de 0.

21. Pe o pistă de automobile circulară se află n mașini identice. Se știe că benzina aflată în toate cele n rezervoare ar fi suficientă pentru ca o mașină să parcurgă un tur complet de circuit.

Să se arate că există cel puțin o mașină ce poate parcurge un tur de circuit, luând benzina din mașinile întâlnite pe parcurs.

22. 12 persoane sunt așezate la o masă circulară. În câte moduri putem alege 5 persoane din cele 12 astfel încât să nu fie alese două persoane învecinate ?

23. Pe o circumferință sunt date 1200 de puncte. Să se arate că există un arc $\widehat{AB}$ având măsura de 30^0 în interiorul căruia să fie exact 100 de puncte.

Baraj O.B.J., 2001

24. La o masă circulară, 25 de persoane participă la un joc folosind 50 de cărți pe care sunt scrise de două ori numerele

$$1, 2, 3, ..., 25.$$

La început, fiecare persoană are două cărți distincte. O mutare înseamnă ca toate persoanele să paseze cartea mai mică vecinului din dreapta.

Demonstrați că după un număr de mișcări va exista o persoană având două cărți egale.

25. Pe circumferința unui cerc de lungime $6n$ se marchează $3n$ puncte astfel încât să obținem n arce de lungime 1, n arce de lungime 2 și n arce de lungime 3.

Să se arate că printre punctele marcate există două diametral opuse.

26. Un număr par de persoane sunt așezate în jurul unei mese circulare. După o pauză, aceeași persoană se reașează la masă ocupând poziții arbitrare. Să se arate că există cel puțin două persoane astfel încât numărul persoanelor așezate între ele a rămas neschimbat.

Propusă O.I.M., 1988

2. TABLA DE ȘAH (și nu numai...)

27. Pe o diagonală a unei table de șah de dimensiuni 10×10 sunt așezați 10 pioni. Se admite mișcarea concomitentă a oricăror doi pioni cu un pătrat mai jos.

Se pot aduce în câteva mișcări toți pioni pe linia orizontală de jos ?

Olimpiadă Moldova

28. Se consideră o tablă de dimensiuni 8×8.

a) Care este numărul minim de culori cu care putem colora cele 64 de câmpuri ale tablei astfel încât oricare două câmpuri având o latură comună să fie diferit colorate ?

b) Aceeași întrebare dacă oricare două câmpuri având cel puțin un vârf comun sunt diferit colorate.

29. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni $m\times n$, unde $m,n\geq 2$ sunt numere naturale. Câte dreptunghiuri cu laturile paralele cu cele ale dreptunghiului inițial și având vârfurile în centrele celor celor mn pătrate unitate există ?

30. Se consideră o tablă de șah infinită. Într-un câmp al acesteia se află plasat un cal. Să se arate că el poate ajunge dintr-un număr de mutări să ocupe orice alt câmp al tablei de șah.

31. Care este numărul minim de mutări ale unui cal pe tabla de șah astfel încât el să ajungă dintr-un colț al tablei în colțul opus ?

32. Pe o tablă cu 20 de linii și 20 de culoare se marchează 30 de pătrate unitate. Să se arate că se pot elimina 10 linii și 10 coloane astfel încât printre cele 100 de pătrate rămase să nu existe pătrate marcate.

33. În cele mn pătrate unitate ale unei table de șah dreptunghiulare de dimensiuni $m\times n$ se scriu numerele 1 sau -1 astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie -1. Să se arate că $m+n$ este par.

34. Câmpurile unei table de șah de latură 7 se numerotează arbitrar cu numerele de la 1 la 49. Se calculează sumele elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Din cele 14 sume, fie a numărul celor impare și b numărul celor pare.

Există o numerotare cu proprietatea că $a=b$?

Baltic Way, 2001

35. Pe o tablă dreptunghiulară formată din $m \times n$ pătrate unitate se așează cruciulițe formate din 5 pătrate: .

Câte cruciulițe pot fi așezate pe tablă ca să acopere un pătrat dat din cele mn ?

36. În cele 64 de pătrate ale unei table de șah se scriu numerele -1, 0 sau 1. Este posibilă o numerotare astfel încât sumele numerelor de pe linii, coloane și diagonale să fie distincte ?

37. În fiecare din cele 9 căsuțe ale unei table de latură 3 este scrisă cifra 0. Se alege un pătrat de latură 2 și se mărește numărul scris în fiecare din cele 4 căsuțe cu o unitate.

Folosind repetat acest procedeu, putem obține configurația

4	9	6
7	24	11
6	12	8

?

Dar

4	9	6
7	24	11
6	13	6

?

38. Două colțuri opuse sunt eliminate dintr-o tablă de șah de dimensiuni 8×8.

Să se arate că partea astfel obținută nu se poate acoperi cu dreptunghiuri disjuncte de dimensiuni 2×1.

39. Dintr-o tablă de șah de dimensiuni 8×8 se elimină două pătrate, unul alb și unul negru. Să se arate că suprafața rămasă se poate acoperi cu 31 de dreptunghiuri de dimensiuni 2×1.

40. Un dreptunghi de dimensiuni 4×100 este împărțit în 400 de pătrate egale, dintre care 154 se hașurează. Să se arate că există 4 centre ale unor pătrate hașurate care să fie puncte conciclice.

41. O ciocolată este formată din 6×9 pătrate. Doi elevi rup pe rând fâșii dreptunghiulare de lățime 1 și le mănâncă. Care trebuie să fie tactica elevului care rupe primul ciocolata pentru ca el să mănânce mai multe pătrățele de ciocolată decât cel de-al doilea ?

Olimpiadă Moldova

42. În interiorul unui pătrat se consideră m puncte. Să se arate că putem împărți suprafața pătratului în n^2 pătrate egale astfel încât cele m puncte să se afle în interiorul acestor n^2 pătrate (și nu pe laturile acestora).

43. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni 3×7 format cu 21 de pătrate unitate. Să se arate că oricum am colora aceste pătrate cu 2 culori există 4 pătrate de aceeași culoare astfel încât centrele acestora să fie vârfurile unui dreptunghi.

44. Pe o tablă de șah de dimensiuni 8×8 este așezat un rege. Doi jucători mută pe rând regele – într-unul din pătratele învecinate – fără ca acesta să ocupe una din pozițiile vizitate anterior. Pierde jucătorul care nu poate muta.

Să se determine strategia câștigătoare pentru primul jucător.

45. Se consideră o tablă infinită de șah. În interiorul fiecărei câmp al tablei este scris un număr natural astfel încât acesta să fie media aritmetică a celor 4 numere scrise în câmpurile vecine (două câmpuri se numesc vecine dacă au o latură comună).

Să se arate că toate numerele sunt egale.

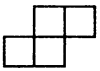
46. O tablă de dimensiuni 4×4 se acoperă cu 5 dreptunghiuri de dimensiuni 3×1 și un pătrat unitate.

Să se arate că pătratul unitate se află în mod necesar într-un colț al tablei.

47. Câți cai se pot așeza pe o tablă de șah fără ca aceștia să se atace ?

48. În cele 64 de pătrate ale unei table de șah se scriu la întâmplare numerele de la 1 la 64. Să se arate că există două pătrate având o latură comună astfel încât diferența numerelor din aceste pătrate să fie cel puțin egală cu 5.

49. Un pătrat de latură 6 se împarte în 36 de pătrate unitate. Numim *tetris* o figură de forma



Este posibilă numerotarea pătratelor de la 1 la 36 astfel încât oricum am plasa un *tetris*, suma celor 4 numere corespunzătoare pătratelor ce îl formează să fie divizibilă cu 9 ?

50. Pătratele unitate ale unei table de latură 8 sunt numerotate de la 1 la 64 astfel:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

i) Să se arate că se pot hașura 32 de pătrate astfel încât pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie 4 pătrate hașurate.

ii) Să se arate că pentru orice astfel de hașurare suma numerelor din pătratele hașurate este egală cu suma numerelor din pătratele nehașurate.

51. Pe o tablă pătrată de latură 8, 7 pătrate unitate sunt haşurate. Un elev haşurează pătratele care au cel puţin 2 pătrate vecine (având o latură comună) haşurate. Poate elevul să haşureze pe toate cele 64 de pătrate ?

52. Un pătrat de latură 100 se împarte în 10.000 de pătrate egale. Numim vecine două pătrate care au o latură comună.

a) Este posibil să colorăm un număr par de pătrate astfel încât orice pătrat colorat să aibă un număr par de pătrate vecine colorate ?

b) Este posibil să colorăm un număr impar de pătrate astfel încât orice pătrat colorat să aibă un număr impar de pătrate vecine colorate ?

Olimpiadă Bulgaria

53. Într-un parc sunt plantaţi 10.000 de copaci la intersecţia a 100 de linii şi 100 de coloane, astfel încât distanţa dintre doi pomi consecutivi ai unei linii sau coloane să fie aceeaşi. Să se determine numărul maxim de copaci ce pot fi tăiaţi astfel încât stând în locul unui copac tăiat să nu putem vedea nici un alt loc al unui copac tăiat.

Olimpiadă Germania

54. În câte moduri distincte se poate acoperi suprafaţa unui pătrat de latură 8 cu 64 de triunghiuri dreptunghice de catete 1 colorate în roşu şi 64 de triunghiuri dreptunghice de catete 1 colorate în albastru, dacă două triunghiuri ce au o latură comună sunt diferit colorate ?

55. Vârfurile pătratelor unitate ale unei table de dreptunghiulare $m \times n$ sunt colorate cu roşu, verde sau albastru astfel încât toate vârfurile de pe conturul tablei sunt colorate cu roşu. Spunem că un pătrat unitate este *bine colorat* dacă exact o pereche de vărfuri adiacente ale pătratului are vârfurile la fel colorate.

Să se arate că numărul pătratelor *bine colorate* este par.

Olimpiadă India, 2001

3. PROBLEME CU NUMERE

56. Să se arate că oricum am alege 51 de numere dintre 1, 2, 3, ..., 100 există două dintre acestea care sunt prime între ele.

57. Numărul 2^n are 30 de cifre. Să se arate că una din cifre se repetă de cel puţin 4 ori.

58. Se consideră 100 de numere naturale arbitrare. Să se arate că putem alege 15 numere dintre acestea astfel încât diferenţa oricăror două dintre ele să se dividă cu 7.

59. Fie n un număr natural impar și $a_1, a_2, ..., a_n$ o permutare a numerelor 1, 2, ..., n. Să se demonstreze că produsul $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)...(a_n - n)$ este par.

60. Considerăm mulțimea $M = \{1,2,3,...,1000000\}$ și submulțimea A a lui M formată din numerele ce pot fi scrise sub forma

$$m^2 + k^3, \ m,k \in \mathbb{N}.$$

Care din mulțimile A sau $M \setminus A$ are mai multe elemente?

Olimpiadă Rusia

61. Din mulțimea 1, 2, 3, ..., 99 se aleg 50 de numere astfel încât suma oricăror două dintre acestea să nu fie egală cu 99 sau 100.

Să se arate că numerele alese trebuie să fie

50, 51, ..., 99.

62. Care este numărul maxim de numere care pot fi alese dintre

1, 2, 3, 4, ..., 49, 50

astfel încât suma oricăror două numere alese să nu fie divizibilă cu 7 ?

Olimpiadă Moldova

63. Numere întregi impare consecutive sunt grupate în felul următor:

{1}; {3, 5}; {7, 9, 11}; {13, 15, 17, 19}; ... .

Găsiți suma cifrelor din a n-a grupă.

64. Numerele naturale sunt aranjate astfel:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				
⋮					

Să se afle numărul liniei și coloanei pe care este scris numărul 2002.

Propusă O.B.J., 2002

65. Zece tenismeni participă la un turneu în care fiecare joacă 9 partide, cu toți ceilalți participanți. Notăm cu x_i numărul de victorii ale jucătorului i și cu y_i numărul de înfrângeri. Să se arate că

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2.$$

66. Care este numărul maxim de numere dintre

1, 2, 3, 4, 5, ..., 2002

care se pot alege astfel încât suma oricăror două numere alese să nu se dividă cu diferența lor ?

67. Pe o tablă sunt scrise numerele

$$1, 2, 3, ..., 100.$$

Se aleg la întâmplare două numere, se șterg, iar pe tablă se scrie diferența pozitivă a acestora. Procedăm la fel cu cele 99 de numere rămase și continuăm până când rămâne un singur număr. Este posibil ca acesta să fie 1? Dar dacă pe tablă erau scrise inițial numerele 1, 2, 3, ..., 100, 101 ?

68. Se consideră numerele distincte $a_1, a_2, ..., a_{20}$ dintre numerele 1, 2, 3, .., 100. Să se arate că cel puțin trei dintre diferențele $a_i - a_j$, $i \neq j \in \{1,2,...,20\}$ sunt egale.

69. Se dau k numere naturale $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n$, unde $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Să se arate că există $i, j \in \{1,2,...,k\}$ astfel încât $a_1 + a_i = a_j$.

70. Să se împartă numerele 1, 2, 3, ..., 16 în două grupe de câte 8 numere astfel încât pentru orice două numere distincte a, b din prima grupă să existe două numere distincte c, d din cea de a doua grupă cu proprietatea că

$$a + b = c + d.$$

71. Se consideră 8 grămezi formate dintr-un număr diferit de pietricele. Se știe că pietricelele oricărei grămezi pot fi distribuite celorlalte 7 astfel încât numărul pietricelelor după redistribuire să fie același în fiecare grămadă. Să se afle numărul minim de pietricele din grămada cea mai numeroasă.

Olimpiadă Belarus

72. Se consideră șirul lui Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

în care fiecare termen începând cu al treilea este suma precedenților doi termeni.

Să se arate că printre primii 100 000 002 de termeni ai șirului există unul care se termină în 4 zerouri.

73. Numerele 1, 2, 3, ..., $2n - 1$, $2n$ se împart în două grupe de n elemente: $a_1 < a_2 < ... < a_n$ și $b_1 > b_2 > ... > b_n$. Să se arate că

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = n^2.$$

74. Se consideră o mulțime de 10 numere arbitrare de 2 cifre. Să se arate că există două submulțimi disjuncte ale acesteia astfel încât suma numerelor din cele două submulțimi să fie aceeași.

O.I.M., 1972

75. Din numerele 1, 2, 3, ..., 2046 se aleg 21 de numere. Să se arate că există trei numere distincte a, b, c dintre cele 21 cu proprietatea că

$$bc < 2a^2 < 4bc.$$

76. Numerele 1, 2, 3, ..., 9 se împart în două grupe având 3 și respectiv 6 elemente. Să se arate că într-una din grupe există trei elemente astfel încât unul dintre acestea să fie media aritmetică a celorlalte două.

77. Fie m și n două numere naturale de parități diferite astfel încât $m < n < 5m$. Să se arate că numerele 1, 2, 3, ..., $4mn$ pot fi grupate câte două astfel încât suma numerelor din orice grupă să fie pătrat perfect.

Baraj O.I.M., 2002

4. COMBINATORICĂ ... GEOMETRICĂ

78. Să se arate că orice poliedru are două fețe cu același număr de laturi.

79. Să se descompună un pătrat de latură 7 în 5 părți astfel ca acestea să reconstituie (prin rearanjare) trei pătrate având laturi de lungimi diferite.

80. Într-o țară sunt mai multe orașe astfel încât distanța dintre oricare două orașe este diferită de orice altă distanță dintre două orașe. Într-o dimineață decolează din fiecare oraș câte un avion către orașul cel mai apropiat.
Este posibil ca într-un oraș să aterizeze mai mult de 5 avioane în aceeași zi ?

81. În interiorul unui pătrat de latură 1 se află 61 de puncte.
Să se arate că există două puncte aflate la o distanță cel mult egală cu 1/5.

82. Un poligon inscriptibil are 2003 vârfuri și 1002 unghiuri egale. Să se arate că poligonul are două laturi egale.

83. În interiorul unui pătrat de latură 1 sunt situate câteva cercuri având suma lungimilor circumferințelor egală cu 10.
Să se arate că există o dreaptă care să intersecteze cel puțin 4 cercuri.

84. În interiorul unui poligon convex cu n laturi se consideră m puncte. Să se arate că oricum am descompune suprafața poligonului în triunghiuri disjuncte, având vârfurile în cele $n+m$ puncte date, numărul triunghiurilor astfel obținute este constant.

Baraj O.I.M., 1973

85. În interiorul unui cub de latură 9 se află 1981 de puncte. Să se arate că există 2 puncte la o distanță mai mică decât 1.

86. Într-un poligon regulat cu $2n$ laturi, n dintre diagonale sunt concurente într-un punct S care nu este vârf al poligonului. Să se arate că punctul S este centrul poligonului.

Propusă O.B.J., 1999

87. În interiorul unui triunghi echilateral de latură 15 se iau 111 puncte. Demonstrați că se poate așeza întotdeauna o monedă circulară cu diametrul $\sqrt{3}$ astfel încât ea să acopere cel puțin 3 puncte. (Nu se cere ca moneda să fie plasată în întregime în interiorul triunghiului).

88. Se consideră un poligon convex având n laturi. Să se arate că există trei vârfuri ale acestuia cu proprietatea că suma pătratelor lungimilor celor trei segmente determinate de acestea este cel puțin egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor poligonului.

89. Într-un pătrat de latură 1 se află o linie poligonală de lungime mai mare ca 1000. Să se arate că există o dreaptă paralelă la o latură a pătratului care taie linia poligonală în cel puțin 501 puncte.

90. În interiorul unui dreptunghi de arie 5 se află 9 poligoane având fiecare aria 1. Să se arate că există două poligoane care au în comun o suprafață de arie mai mare sau egală cu 1/9.

91. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni 25×20. Din interiorul său se scot arbitrar 120 de pătrate (inclusiv laturile) de latură 1. Să se arate că se poate așeza în suprafața rămasă un disc de diametru 1.

92. Pe o dreaptă se dau 50 de segmente închise. Să se arate că există 8 segmente ce au un punct comun sau există 8 segmente astfel încât oricare două sunt disjuncte.

93. Un pătrat de latură 1 se împarte în 9 pătrate egale de latură $\frac{1}{3}$ și se hașurează pătratul din mijloc. Se repetă procedeul, împărțind cele 8 pătrate rămase în 9 pătrate fiecare, hașurându-se pătratele din mijloc. Să se arate că după 1000 de astfel de pași aria hașurată depășește 0,999.

Baraj O.B.J., 2002

94. Fixăm într-un plan un sistem de coordonate carteziene xOy. Fie S o suprafață având aria mai mare strict ca 1. Să se arate că există două puncte $P(a,b)$ și $Q(c,d)$ astfel încât numerele $a-c$ și $b-d$ să fie întregi.

95. Fie S o reuniune finită de intervale disjuncte incluse în [0, 1] astfel încât nu există două puncte din S aflate la distanța 1/10. Să se arate că suma lungimilor intervalelor din S este cel mult egală cu $1/2$.

96. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră 9 puncte. Să se arate că putem alege 3 dintre acestea care să fie vârfurile unui triunghi cu aria cel mult egală cu 1/8.

O.B.J., 1997

97. Se consideră $2n$ puncte în plan. Să se arate că există o dreaptă cu proprietatea că în semiplanele determinate de ea se află câte n puncte.

98. Se consideră n puncte într-un plan, nu toate coliniare. Fiecărui punct i se asociază un număr real astfel încât pentru orice dreaptă ce trece prin cel puțin două puncte date, suma numerelor asociate punctelor de pe dreaptă să fie nulă.

Să se arate că toate numerele sunt 0.

99. Fiecărui punct din plan i se asociază un număr real astfel încât numărul asociat centrului cercului înscris într-un triunghi să fie egal cu media aritmetică a numerelor asociate vârfurilor triunghiului, oricare ar fi acesta.

Să se arate că tuturor punctelor din plan le este asociat același număr.

Olimpiada SUA, 2001

100. (Teorema lui Euler). Numim hartă o rețea de curbe ce unesc punctele $A_1, A_2, ..., A_p$ și nu au alte puncte comune. În plus, rețeaua are proprietatea de conexiune, adică din orice punct $A_1, A_2, ..., A_p$ se ajunge la altul mergând numai pe curbele rețelei.

Punctele $A_1, A_2, ..., A_p$ se numesc vârfurile hărții, liniile sunt frontierele iar regiunile în care acestea împart planul se numesc hărți.

Dacă s, L, p reprezintă numărul țărilor, frontierelor și vârfurilor unei hărți, atunci

$$s + p = L + 2$$

101. Trei vecini certați au trei fântâni comune. Se pot duce 9 alei de la fiecare vecin la fiecare fântână fără ca acestea să se întretaie ?

102. Se pot construi 10 drumuri care să unească 5 orașe două câte două, fără ca drumurile să se întretaie ?

103. Un poliedru are cel puțin 5 fețe și în fiecare vârf al poliedrului sunt concurente exact 3 muchii ale acestuia. Doi jucători își scriu pe rând numele pe câte o față a poliedrului. Câștigă cel care și-a scris numele pe 3 fețe ale poliedrului având un vărf comun. Demonstrați că primul are strategia câștigătoare.

Putnam, 2002

104. O mulțime finită de puncte din plan are proprietatea că pentru oricare două puncte ale mulțimii există un al treilea (în mulțime) cu care să formeze un triunghi echilateral. Să se arate că mulțimea are 3 puncte.

105. Se consideră cubul *ABCDEFGH*. Să se arate că putem scrie un număr de submulțimi ale mulțimii $\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$ având 4 elemente astfel încât oricare 3 vârfuri ale cubului să se afle în exact una din submulțimile enumerate.

Olimpiadă Ungaria, 2002

106. Se consideră în plan o mulțime de n puncte cu proprietatea că orice dreaptă ce trece prin două puncte ale mulțimii mai conține cel puțin încă un punct. Să se arate că toate punctele sunt coliniare.

Problema lui Sylvester

107. Se decupează din hârtie o figură care are aria egală cu 1, apoi se împarte în 10 zone și se colorează aceste zone în 10 culori. Se întoarce apoi figura pe partea cealaltă și se împarte în alt mod tot în 10 zone. Să se demonstreze că aceste 10 zone pot fi colorate cu aceleași culori ca și cele de pe partea opusă astfel încât suma ariilor zonelor vopsite pe ambele părți în aceeași culoare sa nu fie mai mică decât 1/10.

Propusă O.I.M.

108. Se consideră un poligon convex cu 1415 laturi și având perimetrul de 2001cm. Să se arate că există trei vârfuri ale poligonului care formează un triunghi cu aria mai mică de 1 cm^2.

O.B.J., 2001

109. Este dat un pătrat S cu latura de lungime 20. Fie M mulțimea formată cu cel patru vârfuri ale lui S și cu 1999 puncte arbitrare interioare lui S.

Demonstrați că există un triunghi cu vârfuri în M și de arie cel mult egală cu $1/10$.

O.B.J., 1999

110. Fie *ABCD* un pătrat de latură 1. Pentru orice două puncte distincte M și N situate în interiorul pătratului astfel încât dreapta MN nu conține nici un vârf al pătratului, notăm $s(M,N)$ cea mai mică arie a unui triunghi cu vârfurile în mulțimea $\{A,B,C,D,M,N\}$.

Să se afle cel mai mic număr real k pentru care $s(M,N) \le k$, oricare ar fi M, N cu proprietățile de mai sus.

Baraj O.I.M., 2002

111. Se dau 5 puncte în plan cu proprietatea că oricare trei formează un triunghi cu aria cel puțin 2. Să se arate că există 3 puncte dintre acestea ce formează un triunghi de arie cel puțin 3.

Baraj O.B.J., 2002

5. DIVERSE

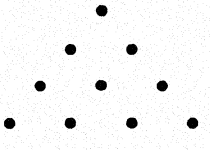
112. Să se demonstreze că numărul de cărți roșii din primele 26 de cărți ale unui pachet de joc bine amestecat este egal cu numărul de cărți negre din ultimele 26 de cărți. (Un pachet de joc este format din 52 de cărți, 26 roșii şi 26 negre).

113. Într-o sală se află n persoane. Să se arate că există două persoane care au acelaşi număr de cunoştințe.

114. Pe laturile şi diagonalele unui pentagon regulat se scriu numerele de la 1 la 10. Este posibilă o numerotare astfel încât suma numerelor scrise pe laturile triunghiurilor având vârfurile comune cu pentagonul să fie constantă ?

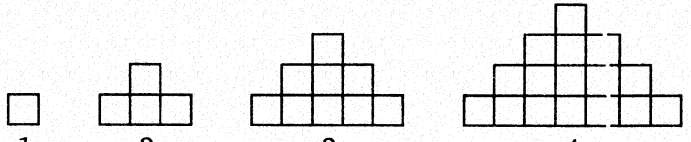
115. Se pot numerota muchiile unui cub de la 1 la 12 astfel încât suma numerelor corespunzătoare celor 3 muchii care pleacă din acelaşi vârf să fie constantă?

116. Se consideră 10 puncte plasate ca în configurația următoare:



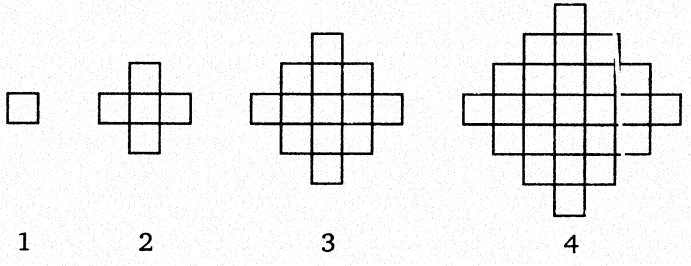
Care este numărul minim de puncte ce trebuiesc şterse astfel încât printre cele rămase să nu existe 3 care să fie vârfurile unui triunghi echilateral ?

117. 1. Se consideră următoarea succesiune de figuri formate cu pătrate unitate:



Câte pătrate se află în figura numărul n ?

2. Aceeaşi întrebare pentru şirul



118. Numerele întregi se colorează cu roșu sau albastru astfel încât:

a) dacă n este roșu, $n+5$ este albastru;

b) dacă n este albastru, $n-5$ este roșu.

În câte moduri diferite se poate realiza o astfel de colorare ?

119. O clasă are 25 de elevi. La sfârșitul fiecărei săptămâni, ei participă la un concurs. Profesorul formează în acest scop 5 echipe a câte 5 elevi, astfel încât 2 elevi care au fost coechipieri într-o săptămână să nu fie coechipieri în săptămâna următoare.

Să se arate că după cel mult 7 săptămâni este necesar ca 2 elevi să fie coechipieri în cel puțin 2 săptămâni.

120. Patru oameni se află la intrarea unui tunel întunecos prin care nu pot trece simultan decât doi oameni. Ei au nevoie de 1, 2, 5 și respectiv 10 minute pentru a îl traversa și dispun de o torță care arde doar 17 minute.

Pot traversa cei 4 oameni tunelul ?

121. Se dă un cântar cu două talere. Câte greutăți sunt necesare pentru a putea cântări orice obiect având 1, 2, 3, ..., 40kg ?

122. Doi elevi joacă împreună următorul joc: dintr-o grămadă de 150 de chibrituri fiecare ia pe rând cel puțin unul, dar cel mult 10 chibrituri. Câștigă cel care ridică ultimul chibrit. Găsiți strategia câștigătoare pentru primul jucător.

123. Într-o sală se află 100 de persoane, fiecare având 67 de cunoscuți.

Să se arate că există 4 persoane care se cunosc fiecare cu fiecare.

124. La un congres sunt n participanți, $n \geq 4$. Oricum am alege 4 participanți, există unul care se cunoaște cu ceilalți 3.

Să se arate că există un participant care este cunoscut tuturor celorlalți.

125. Muchiile laterale și diagonalele bazei unei piramide nonagonale sunt colorate cu roșu și albastru.. Să se arate că există un triunghi având vărfurile comune cu piramida și laturile de aceeași culoare.

126. Se consideră o prismă pentagonală $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ având muchiile bazelor precum și segmentele A_iB_j, $i,j=\overline{1,5}$, colorate cu roșu sau albastru.

În fiecare triunghi ce are toate cele trei laturi colorate există atât o latură roșie, cât și una albastră.

Să se arate că toate cele 10 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeași culoare.

O.I.M., 1979

127. Un alfabet are 33 de litere. Numim *cuvânt* un șir de litere ale alfabetului cu proprietatea că între două litere identice ale șirului nu se află o pereche de litere identice. Există cuvinte formate cu 100 de litere ?

128. Se consideră n pahare așezate cu gura în sus. Se cere să răsturnăm toate paharele printr-o serie de operații astfel încât la fiecare operație să fie întoarse $n-1$ pahare.

Să se arate că acest lucru este posibil pentru n par și nu e posibil pentru n impar.

129. Se consideră în plan o mulțime finită de puncte. Anumite perechi de puncte se unesc prin segmente. Să se arate că numărul punctelor care sunt unite cu un număr impar de puncte este par.

130. Dintre cei 20 de elevi ai unei clase oricare doi elevi au un bunic comun. Să se arate că există un bunic care are cel puțin 14 nepoți în această clasă.

Olimpiadă Moldova

131. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată (și nu au fost rezultate egale). Raportul între numărul victoriilor obținute de fete față de cele obținute de băieți a fost $7:5$. Câți participanți au fost la acest turneu ?

O.B.J., 2000

132. Numerele întregi se colorează în n culori astfel încât dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $|x-y| \in \{2,3,5\}$, atunci x și y au culori diferite. Să se arate că $n \geq 4$.

Baraj O.I.M., 2002

133. Un triunghi echilateral de latură 10 se împarte în 100 de triunghiuri echilaterale de latură 1 prin paralele duse la laturile triunghiului.

Câte triunghiuri echilaterale, având laturile paralele cu cele ale triunghiului dat, apar în această configurație ?

Baraj O.B.J., 2002

134. În timpul unei conferințe, fiecare din cei 5 matematicieni participanți au adormit de două ori. Oricum am alege 2 matematicieni, observăm că există un moment în care amândoi erau adormiți.

Să se arate că există un moment în care 3 matematicieni dormeau.

Olimpiada S.U.A., 1986

SOLUȚII

CAPITOLUL I

TEORIA NUMERELOR

1. NUMERE PRIME, NUMERE COMPUSE

1. Dacă $p,q,r = \mathfrak{M}3+\alpha$ atunci $p+q+r \vdots 3$. Dacă $p > 3$ atunci avem de exemplu $p,q = \mathfrak{M}3+\alpha$ și $r = \mathfrak{M}3-\alpha$ unde $\alpha \in \{-1,1\}$ și rezultă $\frac{p+r}{2} \vdots 3$ adică $\frac{p+r}{2} = 3$ și contradicția $p = q = 3$. Rezultă $p = 3$. Un exemplu de astfel de numere este 3, 7, 19.

L. Panaitopol

2. a) Dacă în mulțime există 3 numere de forma $3k+\alpha$ atunci suma lor se divide cu 3, adică nu este număr prim.

b) Dacă există trei numere de formele $3k+1, 3h+2, 3l+3$, de asemenea suma lor se divide cu 3. Așadar putem avea două numere de forma $3k+\alpha$, două de forma $3h+\beta, \alpha \neq \beta$ şi deci $n \leq 4$. Pentru $n = 4$ găsim numerele 3, 5, 11, 15 şi deci $n_{max} = 4$.

L. Panaitopol

3. Presupunem că există o mulțime finită de numere prime de forma $4k-1$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Numărul $M = 4a_1a_2...a_n - 1$ are un divizor $a = 4k-1$ deci $a \in A$ adică $a = a_i$. Cum $a_i \mid 4a_1a_2...a_i...a_n - 1$, rezultă contradicția $a_i \mid 1$. Analog dacă numerele prime de forma $6k - 1$ sunt elementele mulțimii $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, considerăm numărul $M = 6b_1b_2...b_m - 1$ care are un divizor din B, ceea ce conduce la contradicție.

4. Avem $p = 6k \pm 1$ și deci $\frac{p^2+2}{3} = \frac{36k^2 \pm 12k + 1 + 2}{3} = 12k^2 \pm 4k + 1 =$
$= (2k)^2 + (2k)^2 + (2k \pm 1)^2$.

5. Arătăm că pentru $n \geq 12$, n se scrie ca sumă a două numere compuse. Dacă $n = 2k, k \geq 6$, avem scrierea $n = 6 + 2(k-3)$. Dacă $n = 2k + 1$, $k \geq 6$ avem $n = 9 + 2(k-4)$. Prin verificare se arată că numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 nu pot fi scrise ca sumă a două numere compuse.

6. Avem $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$. Dacă $a - 1 > 1$ rezultă că $a^n - 1$ este compus. Deci $a = 2$. Dacă n este compus $n = pq$, $p, q \geq 2$ atunci

$$2^n - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ... + 2^p + 1)$$

și deci $2^n - 1$ este compus. Așadar n este prim.

7. Notăm $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}=c$ și avem

$$b=(c+a^n)^2-a^n=c^2+2ca^n+a^n(a^n-1)=c^2+2ca^n+a^n(a-1)c=$$
$$=c(c+2a^n+a^n(a-1))=(1+a+\ldots+a^{n-1})(a^{n+1}+a^n+a^{n-1}+\ldots+a+1)$$

și deci b este compus.

8. Notăm a_i, $i\in\overline{1,7}$ numerele date. Verificările pentru $n\le 17$ arată că $n=7$ este convenabil. Fie $n\ge 8$, $n=7k+\alpha$ cu $k\ge 1$ și $\alpha\in\overline{1,7}$. Arătăm că pentru fiecare valoare a lui α unul dintre numerele a_i se divide cu 7:
$\alpha=1, a_3=7(k+1)$; $\alpha=2, a_5=7(k+2)$; $\alpha=3, a_2=7(k+1)$; $\alpha=4, a_4=7(k+2)$; $\alpha=5, a_6=7(k+3)$; $\alpha=6, a_7=7(k+4)$; $\alpha=7, a_1=7(k+1)$. Singura valoare acceptabilă a lui n este 7.

9. i) Fie a impar. Dacă p, q sunt impare rezultă contradicția $\mathfrak{M}8+1=\mathfrak{M}8+3$. Dacă p și q sunt pare atunci $p=q=2$ și $a=3$ deci număr prim.

ii) Fie a par. Avem $\mathfrak{M}4-1=p^2+q^2$. Rezultă $p=2$ și contradicția $q^2=\mathfrak{M}4-1$.

L. Panaitopol

10. Dacă $(a, 3)=1$ atunci $a^2-1\vdots 3$ și deci $a^4=\mathfrak{M}3+1$. Deci dacă $(abc, 3)=1$ atunci $n=a^4+b^4+c^4-3=\mathfrak{M}3+1+\mathfrak{M}3+1+\mathfrak{M}3+1-3=\mathfrak{M}3$ adică $n\vdots 3$. Cum $n>3$ rezultă că n nu este prim. Rezultă deci că unul dintre numerele prime a, b, c este 3. Fie $a=3$ și deci $n=b^4+c^4+78$. Dacă numerele b și c sunt impare atunci n este par și cum $n>2$ rezultă că n este compus. Deci $b=2$. Rezultă $n=c^4+94$. Dacă $(c, 5)=1$ atunci $c^4=\mathfrak{M}5+1$ și $n=\mathfrak{M}5+1+94=\mathfrak{M}5$ adică n este compus. Așadar $c=5$, $n=179$ și $m=a^2+b^2+c^2-1=37$.

L. Panaitopol

11. Fie $p<q<r$. Din $r\mid p^2+10$ și $r\mid q^2+10$ rezultă $r\mid(q-p)(q+p)$. Cum $r>q-p>0$ rezultă $r\mid p+q$. Deoarece $p+q<2r$ rezultă $p+q=r$ și deci $p=2$. Din $qr\mid p^2+10$ rezultă contradicția $qr\mid 14$. Înlocuind 10 cu 11, după $p=2$ și $r=q+2$ urmează $qr\mid 15$ și se găsesc $p=2, q=3, r=5$ care verifică toate condițiile.

12. Considerăm $a=4b^4$ cu $b\ge 2$ și avem $x_n=n^4+4b^4=n^4+4n^2b^2+4b^4-4n^2b^2=(n^2+2b^2)^2-(2nb)^2=(n^2+2nb+2b^2)(n^2-2nb+2b^2)$. Pentru $n>1$ avem $n^2-2nb+2b^2=(n-b)^2+b^2>1$ și deci x_n este compus.

13. Luăm $a=k^3+4k$, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$; $M_1=n^3+4n+k^3+4k=$
$=(n+k)(n^2-nk+k^2+4)$. Cum $n+k>2$, $n^2-nk+k^2>1$ rezultă că M_1 este compus. $M_2=n(n+3)+a$ numărul $n(n+3)$ este par, deci dacă a este par şi $a\ge 4$, M_2 este par și $M_2>2$.Deci M_2 este compus. Vom lua $a=k^3+4k=k(k^2+4)$ cu $k=2h$, $h\ge 1$ și deci $a=8h(h^2+1), h\ge 1$.

L. Panaitopol

14. Deoarece m este prim, a este impar. Fie $a = 2c + 1$ și $d = 2^c$. Avem $n = b^4 + 4^{2c+1} = b^4 + 4d^4 = (b^2 + 2d^2)^2 - 4b^2d^2 = (b^2 - 2bd + 2d^2)(b^2 + 2d^2 + 2bd)$. Cum și n este prim rezultă că $b^2 - 2bd + 2d^2 = 1$ adică $(b-d)^2 + d^2 = 1$ și deci $b - d = 0$ și $d = 1$. Rezultă $2^c = 1$ și deci $c = 0$, adică $a = 1$. Așadar $a = b = 1$.

L. Panaitopol

15. Dacă $n + 1 = ab$ unde $a, b \geq 2$ atunci $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{nab}{2}$ și este suficient să arătăm că $2 \cdot (n-1)!$ se divide la ab. Dacă $a < b$ atunci avem $a < b \leq n-1$ și $ab \mid 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot a \cdot ... \cdot b \cdot ... \cdot (n-1)$. Dacă $a = b$ atunci $a = \sqrt{n+1}$ și pentru $n \geq 6$ avem $2\sqrt{n+1} \leq n-1$ și deci $a^2 \mid 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot a \cdot ... \cdot 2a \cdot ... \cdot n-1$. Pentru $n \leq 5$ verificarea se face separat. Dacă $n + 1$ este prim, deoarece $n + 1 > k$ unde $k \in \overline{1,n}$ rezultă că $(n+1) \mid 2 \cdot (n-1)!$.

16. Pentru $n = 2$ numerele prime sunt 3, 5, 7, 11. Pentru $n \geq 3$, 6 numere sunt pare și deci nu sunt prime. Printre numere se găsește și un număr impar de forma $12k + 3$ și unul de forma $12k + 9$. Cum nici aceste numere nu sunt prime rezultă că cel mult 4 dintre numerele date sunt prime.

17. Avem $\frac{a}{3c} = \frac{d}{b} = \frac{u}{v}$, $(u,v) = 1$. Rezultă $a = \alpha u$, $3c = \alpha v$, $d = \beta u$, $b = \beta v$ și $n = \frac{(\alpha^2 + 6\beta^2)(v^2 + 3u^2)}{3}$ unde $3 \mid \alpha v$. Dacă $3 \mid \alpha$ atunci $\alpha = 3\gamma$ și $n = (3\gamma^2 + 2\beta^2) \cdot (v^2 + 3u^2)$, $u, v, \beta, \gamma \geq 1$. Dacă $3 \mid v$ atunci $v = 3w$ și $n = (\alpha^2 + 6\beta^2)(u^2 + 3w^2)$ cu $u, w, \alpha, \beta \geq 1$ și atunci n este compus.

18. Avem $x_n = \underbrace{33...37}_{\text{de } n \text{ ori}} = 7 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + ... + 3 \cdot 10^n = 7 + 30\frac{(10^n - 1)}{9} = \frac{10^{n+1} + 11}{3}$. Cum $1001 \vdots 7$ rezultă că $10^3 = 7k - 1$ și deci pentru $n = 6m$ avem $3x_n = 10(7k+1)^{2m} + 11 = \mathfrak{M}7 + 10 + 11 = \mathfrak{M}7$ și deci $7 \mid x_n$ dacă $n = 6m$.

19. Avem $x_n = 1 + 10^2 + 10^4 + ... + 10^{2(n-1)} = \frac{10^{2n} - 1}{10^2 - 1} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{99}$. Atunci $x_{2k} = \frac{100^k - 1}{99}(10^{2k} + 1)$ și cum $\frac{100^k - 1}{99} \in \mathbb{N}^*$ pentru $k \geq 2$ avem $\frac{100^k - 1}{99} > 1$ și $10^{2k} + 1 > 1$, adică x_{2k} este compus. Pentru $k \geq 1$ avem $x_{2k+1} = \frac{10^{2k+1} - 1}{9} \cdot \frac{10^{2k+1} + 1}{11}$. Numerele $\frac{10^{2k+1} - 1}{9}$, $\frac{10^{2k+1} + 1}{11}$ sunt naturale și mai mari ca 1 deci x_{2k+1} este compus. Singurul număr prim este $x_2 = 101$.

20. Deoarece $d=\frac{bc}{a}$ există $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^*$, astfel ca $a=\beta\gamma,\beta\mid b,\gamma\mid c$. Deci $b=\beta x$, $c=\gamma y$. Rezultă $d=xy$, cu $x,y,\beta,\gamma\in\mathbb{N}^*$, $a-b+c-d=(\gamma-x)(\beta+y)=p$ și deci $\gamma-x=1$, $\beta+y=p$. Rezultă $a=(x+1)(p-y),b=x(p-y),c=y(x+1),d=xy$ și deci $a+d=p(x+1)-y$, $b+c=px+y$.

a) Fie $p=2$. Cum $a>0$ rezultă $2-y>0$ și deci $y=1$. $a+d=b+c=2x+1=q$, adică $a=c=\frac{q+1}{2},b=d=\frac{q-1}{2}$, unde q este număr prim impar.

b) Fie $p\geq 3$, $a+d=q$, $b+c=r$, p,q,r numere prime, q și $a-d$ au aceeași paritate. Deasemenea r și $b-c$ au aceeași paritate. Cum $p=a-d-(b-c)$ este impar rezultă că r sau q este par. Pentru $q=2$ din $a+d=q$ rezultă $a=d=1$, dar din $ad=bc$ rezultă $bc=1$ și $b=c=1$. Avem contradicția $p=0$. Analog tratează cazul $r=2$. Așadar avem numai soluțiile găsite la a).

L. Panaitopol

21. Avem

$$n=20^7+20^2+1=20^7-20+20^2+20+1=20(20^3-1)(20^3+1)+20^2+$$
$$+20+1=(20^2+20+1)\cdot[(20^3+1)(20^2-20)+1]$$

și deci $n\vdots 421$.

22. Avem $x_0=a$ și deci a este prim. Dacă $a\in\{2,3,5,7\}$ atunci $a\mid x_1$ și deci x_1 este compus. Dacă $a=11$, $x_1=221=13\cdot 17$. Așadar $a>11$. Avem $x_n\geq a>11$ și deci este necesar că $x_n\not\vdots 11$ pentru orice $n\in\overline{0,9}$. Avem $x_n=11\cdot 19\cdot n+n+a$ și deci este necesar ca $a,a+1,a+2,\ldots,a+9$ să nu se dividă cu 11. Rezultă $a+10=11k$ și deci $a=11k-10$. Cum a este prim rezultă $a\in\{23,67,89,199,\ldots\}$.

Pentru $a=23$ avem $x_8=13\cdot 131$.

Pentru $a=67$ avem $x_3=17\cdot 41$.

Pentru $a=89$ avem $x_1=13\cdot 23$.

Pentru $a=199$ numerele $x_n,n\in\overline{0,9}$ sunt toate prime. Așadar a minim este 199.

23. Avem $32p+1=x^3$ și deci $32p=(x-1)(x^2+x+1)$. Numărul x^2+x+1 este impar și cum $x^2+x+1>1$ avem $x-1=32$ și $x^2+x+1=p$ rezultă $x=33$ și $p=1123$ care este număr prim. Din relația $2^k p+1=x^3$ rezultă $x-1=2^k$ și $x^2+x+1=p$ și deci $p=4^k+3\cdot 2^k+3$. Pentru $k=3h$, $h>1$, avem $2^k=2^{3h}=8^h=$ $=8^h-1+1=\mathfrak{M}7+1$, $4^k=(2^k)^2=\mathfrak{M}7+1$. Rezultă că $4^k+3\cdot 2^k+3=$ $=\mathfrak{M}7+1+3(\mathfrak{M}7+1)+3=\mathfrak{M}7$ și deci x^2+x+1 nu este număr prim.

24. a) Inegalitatea se mai scrie $\pi(n!+2n)-\pi(n!+n)\leq\pi(2n)-\pi(n)$. (1)

Pentru $n=1$ inegalitatea se verifică. Fie $n\geq 2$. Vom arăta că pentru orice număr prim din intervalul $(n!+n,n!+2n]$ corespunde un număr prim din intervalul $(n,2n]$. Fie

$n!+n < q \le n!+2n$, q număr prim. q se scrie $q = n!+p$ cu $n < p \le 2n$. Dacă p este compus atunci, n = ab, $a, b \ge 2$. Cum $p \le 2n$ rezultă $a \le n$ și deci $q = n!+p = n+ab =$ $= a(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (a-1)(a+1)\ldots n+b)$ și deci contradicția $a \mid q$. Așadar p este prim și deci are loc inegalitatea (1).

b) Dacă n este compus avem $\pi(n) = \pi(n-1)$ și dacă $\frac{\pi(n)}{n} = \frac{\pi(n-1)}{n} < \frac{\pi(n-1)}{n-1}$. Dacă n este prim atunci $\pi(n) = \pi(n-1)+1$ și deci $\frac{\pi(n)}{n} = \frac{1+\pi(n-1)}{n}$. Rămâne de arătat că $\frac{1+\pi(n-1)}{n} > \frac{\pi(n-1)}{n-1} \Leftrightarrow \pi(n-1) < n-1$ ceea ce este adevărat.

L. Panaitopol

25. Considerăm numerele $m!+2, m!+3, \ldots, m!+m$ care sunt toate compuse. Fie n astfel încât $p_n \le m!+1 < p_{n+1}$. Rezultă că $p_{n+1} \ge m!+m+1$ și deci $p_{n+1} - p_n \ge m$.

26. Răspunsul este $n = 2$ și $n = 3$ numerele fiind 7, 17 și 71. Pentru $n \ge 4$ construim un număr cu n cifre, în condițiile date, care este compus. Pentru $n = 3k$ suma cifrelor numărului este $7+3k-1 = \mathfrak{M}3$ și deci orice număr se divide cu 3. Amintim criteriul de divizibilitate cu 7, 11, 13. Pentru $M = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, M se divide cu 7, 11 sau 13 dacă $M_1 = \overline{a_2 a_1 a_0} = \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \overline{a_{11} a_{10} a_9} + \ldots$ se divide cu 7, 11 sau 13. Avem cazurile:

a) $n = 6k+1$. Numărul $N = 7111\ldots1$ se divide cu 7 deoarece
$N_1 = 111-111+111-\ldots+7 \vdots 7$.

b) $n = 6k+2$. Numărul $N = 111\ldots1711$ se divide cu 13 deoarece
$N_1 = 711-111+111-\ldots-111+11 = 611 = \mathfrak{M}13$.

c) $n = 6k+4$. Numărul $N = 711\ldots11 \vdots 13$ deoarece $N_1 = 111-7 = 104 = \mathfrak{M}13$.

d) $n = 6k+5$. Numărul $N = 11\ldots1711$ se divide cu 7 deoarece
$N_1 = 711-111+111+\ldots-11 = 7000 = \mathfrak{M}7$.

27. Numerele $2004!-2, 2004!-3, \ldots, 2004!-2004$ sunt 2003 numere compuse consecutive. Pentru $k \in \overline{2,2004}$ notăm $n_k = 2004!-k$ și avem $n_k = km_k$ și de aici $2^{n_k}-1 = (2^k)^{m_k}-1 = (2^k-1)(2^{k(m_k-1)}+2^{k(m_k-2)}+\ldots+2^k+1)$. Cum $2^k-1>1$ rezultă că $2^{n_k}-1$ este compus pentru orice $k \in \overline{2,2004}$.

28. Fie $n = 5^{397}$ și avem $N = 5^{1985}-1 = \mathfrak{M}5-1 = (n-1)(n^4+n^3+n^2+n+1)$. Cum $n-1 > 5^{100}$ rămâne să descompunem $N_1 = n^4+n^3+n^2+n+1 =$
$= (n^2+3n+1)^2-5n(n+1)^2$. Cum $n = 5m^2$ cu $m = 5^{198}$ avem
$N_1 = (25m^4+15m^2+1)^2-25m^2(5m^2+1) =$
$= (25m^4+15m^2+1-25m^3-5m)(25m^4+15m^2+1+25m^3+5)$ și factorii sunt mai mari ca 5^{100}.

2. DIVIZIBILITATE

29. Fie $a=db$ și $n=dm$, $(b,m)=1$. Avem $\frac{ak}{n}=\frac{bk}{m}$. Cum $(b,m)=1$, $\frac{ak}{n}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow m\mid k$ și deci $k=mt$ cu $t=1,2,...,d$ deoarece $md=n$.

30. Avem $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ deci $2^{11}=23k+1$. Fie $n=11q+r$ cu $r\in\overline{0,10}$. Avem $2^n=2^{11q+r}=(23k+1)^k\cdot 2^r=\mathfrak{M}23+2^r$ și deci $2^n+1=\mathfrak{M}23+2^r+1$ unde $r\in\overline{0,10}$. Înlocuind pe rând r cu 0, 1, 2, ..., 10 se constată că $2^r+1=\mathfrak{M}23$ și deci $2^n+1=\mathfrak{M}23$ oricare ar fi n natural.

31. Avem $M=2^{n+1}(2a^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^n)=2^{n+1}M_1$. Pentru $n=0$ avem $2(2a+9)\vdots 19$ și $2a+9=19k$ adică $a=\frac{19k-9}{2}=9k-4+\frac{k-1}{2}$ și deci $\frac{k-1}{2}=h\in\mathbb{N}$; $k=2h+1$ și $a=19h+5$. Vom încerca $a=5$ și avem $M_1=10\cdot 25^n+9\cdot 6^n=$
$=10(25^n-6^n)+19\cdot 6^n=10(25-6)(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 6+...+6^{n-1})+19\cdot 6^n=\mathfrak{M}19$ și deci $M19$ pentru orice n. Răspunsul este deci $a=5$.

32. Fie k natural astfel încât $2^k\le n<2^{k+1}$. Atunci $x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=\frac{a}{2^k b}$ cu $a,b\in\mathbb{N}^*$ și $(b,2)=1$. Dintre numerele 1, 2, 3, ..., n numai unul și anume 2^k se divide cu 2^k. Așadar $a=\mathfrak{M}2+b$ deci a este impar adică $\frac{a}{2^k b}\notin\mathbb{N}$.

33. Se știe că $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ și deci
$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{1335}=\frac{1}{668}+\frac{1}{669}+...+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}=$
$=\left(\frac{1}{668}+\frac{1}{1335}\right)+\left(\frac{1}{667}+\frac{1}{1334}\right)+...+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}\right)=$
$=2003\left(\frac{1}{668\cdot 1335}+\frac{1}{669\cdot 1334}+...+\frac{1}{1001\cdot 1002}\right)=\frac{2003\cdot c}{668\cdot 669\cdot...\cdot 1334\cdot 1335}$ și deci $2003bc=a\cdot 668\cdot 669\cdot....\cdot 1335$. Deoarece 2003 este prim și cum $2003>k$ pentru $k\in\overline{668,1335}$ rezultă că 2003 divide a.

34. Fie $r_a,r_b,r_c\ge 0$ minime astfel ca $n+r_a\vdots a$, $n+r_b\vdots b$, $n+r_c\vdots c$. Avem $r_a\le a-1$, $r_b\le b-1$, $r_c\le c-1$. Dacă r_a,r_b,r_c sunt distincte alegem $x=n+r_a$, $y=n+r_b$, $z=n+r_c$. Dacă $r_a=r_b=r_c$ alegem $x=n+r_a$; $y=n+r_b+b$, $z=n+r_c+c$. Dacă $r_a=r_b\ne r_c$ alegem $x=n+r_a$, $y=n+r_b+b$, $z=\begin{cases}n+r_c & \text{dacă } r_c\ne r_b+b\\ n+r_c+c & \text{dacă } r_c=r_b+b\end{cases}$.

Dacă $r_b = r_c \neq r_a$ putem alege $x = n + r_a$, $y = n + r_b + b$, $z = n + r_c + c$. Dacă $r_a = r_c \neq r_b$ putem alege $x = n + r_a$, $y = n + r_b$, $z = n + r_c + c$.

35. Avem $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 43$. Rezultă că oricare ar fi n, $(a_1 a_2 ... a_n + 1, 6) = 1$ pentru $n \geq 2$ și dacă $a_{n+1} = 5$ atunci $a_1 a_2 ... a_n + 1 = 5^k$ ceea ce este în contradicție cu $a_1 a_2 ... a_n \neq \mathfrak{M}4$ deoarece $a_1 = 2$ iar pentru $k \geq 2$, a_k este impar.

36. Dacă unul dintre numerele 1, 2, 3, 4 se află în șir, enunțul se confirmă. Presupunem că $\min a_n = k \geq 5$. Din $a_i = k$ rezultă $a_{i+1} \leq k + 1$, $a_{i+2} \leq k + 2, ..., a_{i+j} \leq k + j$ pentru orice j. $a_n (n \geq 2)$ este liber de pătrate și deci nedivizibil cu 4. Dintre numerele $k+1, k+2, k+3, k+4$ unul este divizibil cu 4 și deci există $j \in \overline{1,4}$ astfel ca $a_{i+j} \leq \frac{k+j}{2}$. Cum $\frac{k+j}{2} < k$ s-a ajuns la contradicția $\min\limits_{n \geq 1} a_n = k$. Așadar numărul 2 se află în șir.

L. Panaitopol

37. Avem $a_1 < 10^6$ și deci $a_2 \leq 10^6$ și presupunem că $a_k > 2, \forall\, k \leq 17$. Pentru $k \geq 2$, a_k este impar. Rezultă că $a_k + 1$ par și deci $a_{k+1} \leq \frac{a_k + 1}{2}$. Atunci $a_3 \leq \frac{10^6}{2}$, $a_4 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{10^6}{2} + 1\right) = \frac{10^6}{2^2} + \frac{1}{2}$, $a_5 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{10^6}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{10^6}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$. Rezultă $a_{17} \leq \frac{10^6}{2^{15}} + \sum\limits_{k=1}^{14} \frac{1}{2^k} < 39{,}52 + 1$ și deci $a_{17} \leq 31$. Rezultă deci că $a_{17} \in \{2,3,5,7,11,...,29,31\}$. Deci $a_{18} \in \{2,3,5,7\}$ și apoi $a_{19} \in \{2,3\}$ adică $a_{19} + a_{20} = 5$.

L. Panaitopol

38. Avem $A_0 = 5 \cdot 7$, $A_1 = 6569 + 5^8$ și deci $A_1 \neq \mathfrak{M}5$. Arătăm că $A_n = \mathfrak{M}7$ oricare ar fi $n \geq 0$. Pentru $n \geq 1$ avem $A_n = (7+1)^n + 9 \cdot (27)^{2n} + 25(125)^{2n} =$
$\mathfrak{M}7 + 1 + 9(\mathfrak{M}7 - 1)^{2n} + 25(\mathfrak{M}7 - 1)^{2n} = \mathfrak{M}7 + 1 + 9(\mathfrak{M}7 + 1)^n + 25(\mathfrak{M}7 + 1)^n =$
$= \mathfrak{M}7 + 1 + \mathfrak{M}7 + 9 + \mathfrak{M}7 + 25 = \mathfrak{M}7 + 35 = \mathfrak{M}7$ și deci $(A_0, A_1, A_2, ..., A_{1999}) = 7$.

Dan Brânzei

39. Avem $\frac{a^{n+1} + 2^{n+1} + 1}{a^n + 2^n + 1} - a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2^n (2 - a) + 1 - a \vdots a^n + 2^n + 1$. Pentru $a = 1$ avem $2^n \vdots 2^n + 2$. Pentru $a = 2$ avem $-1 \vdots 2^{n+1} + 1$. Pentru $a \geq 3$ și $n \geq 2$ avem de asemenea o contradicție. $0 < 2^n (a-2) + a - 1 < a^n + 2^n + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-2)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \left(\frac{a}{2}\right)^n + 1$. Este suficient să arătăm că $\left(\frac{a}{2}\right)^n > (a-2)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Pentru $n \geq 2$ avem $\left(\frac{a}{2}\right)^n \geq \frac{a^2}{4}$ și $1+\frac{1}{2^n} \leq 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Rămâne de arătat că $\frac{a^2}{4} \geq \frac{5}{4}(a-2) \Leftrightarrow a^2-5a+10 \geq 0$. Rezultă $n=1$ și $a^2+5 \vdots a+3 \Leftrightarrow (a^2-9)+14 \vdots a+3$, $14 \vdots a+3$ adică $a=4$ sau $a=11$.

L Panaitopol

40. Rezultă $a>b$. Avem $a=bq+r$ cu $0 \leq r \leq b-1$ și $m=\frac{2^a+1}{2^b-1}=\frac{2^{bq+r}+1}{2^b-1}=$

$=\frac{2^{bq+r}-2^r+2^r+1}{2^b-1}=2^r((2^b)^{q-1}+(2^b)^{q-2}+...+2^b+1)+\frac{2^r+1}{2^b-1}$. Deoarece $b>2$ avem $2^r+1 \leq 2^{b-1}+1<2^b-1$ și deci $0<\frac{2^r+1}{2^b-1}<1$ adică $m \notin \mathbb{Z}$. Avem de asemenea $n=\frac{2^a-1}{2^b+1}=\frac{2^{bq+r}-1}{2^b+1}$. Pentru q impar $n=\frac{2^{bq+r}+2^r-(2^r+1)}{2^b+1}=$

$=2^r((2^b)^{q-1}-(2^b)^{q-2}+(2^b)^{q-3}+...+1)-\frac{2^r+1}{2^b+1}$ și $n \notin \mathbb{Z}$, deoarece $0<\frac{2^r+1}{2^b+1}<1$. Pentru q par avem $n=\frac{2^{bq+r}-2^r+2^r-1}{2^b+1}=\frac{2^r((2^{2b})^{\frac{q}{2}}-1)}{2^b+1}+\frac{2^r-1}{2^b+1}$. Cum $(2^{2b})^{\frac{q}{2}}-1 \vdots 2^b+1$ și $0<\frac{2^r-1}{2^b+1}<1$ rezultă $n \notin \mathbb{Z}$.

41. Dacă $m<n$ atunci $a^m+1 \leq a^{n-1}+1<a^n-1$ și deci $a^n-1 \nmid a^m+1$. Dacă $m=n$ atunci avem $\frac{a^m+1}{a^n-1}=\frac{a^n+1}{a^n-1}=1+\frac{2}{a^n-1}$ și $\frac{1}{a^n-1} \notin \mathbb{N}$ deoarece $a^n-1>2$. Dacă $m>n$ avem $m=nq+r$ cu $q \geq 1$ și $0 \leq r<n$. Rezultă $\frac{a^m+1}{a^n-1}=$

$=\frac{a^{nq+r}-a^r+a^r+1}{a^n-1}=a^r(a^{n(q-1)}+a^{n(q-2)}+...+a^n+1)+\frac{a^r+1}{a^n-1} \notin \mathbb{N}$ deoarece $a^n-1>a^r+1>0$.

D.C. Duncan

42. Presupunem $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)=n \in \mathbb{N}^*$ adică $(ad-bc)^2=nabcd$. Notăm $\frac{ad}{bc}=x$ și rezultă $x \in \mathbb{Q}$ și $x+\frac{1}{x}-2=n$ adică $x^2-(n+2)x+1=0$. Pentru ca ecuația să aibă o rădăcină rațională este necesar și suficient ca $\Delta=k^2$, $k \in \mathbb{N}$ adică $(n+2)^2-4=k^2 \Leftrightarrow (n+2-k)(n+2+k)=4$. Cum $n+2-k$ și $n+2+k$ au aceeași paritate avem $n+2-k=n+2+k$ și deci $n=0$.

43. Dacă $a \le b$ rezultă $2b^b > m^m$ cu $m = kb$ și $k \ge 1$. Presupunem $k \ge 2$ și avem $2b^b > (2b)^{2b} = 2^{2b} \cdot b^{2b}$ adică $1 > 2^{2b-1} \cdot b^b \ge 1$. Din această contradicție rezultă $k = 1$ și deci $b = m$ ceea ce înseamnă $a \mid b$.

L. Panaitopol

44. Arătăm că $4^{2^n+1} - 1$ nu are divizori de forma $2^{2^m} + 1$ cu $m \ge 1$. Avem $4^{2^n+1} - 1 = 4^{2^n+1} - 4 + 3 = 4(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) + 3 = 4(2^{2^n} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot (2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) + 3$. Toate numerele de forma $2^{2^m} + 1$ cu $m \le n$, se găsesc în membrul drept. Dacă $2^{2^m} + 1 \mid 4^{2^n+1} - 1$ atunci rezultă contradicția $2^{2^m} + 1 \mid 3$. Cum $257 = 2^{2^3} + 1$ rezultă că $4^{2^n+1} - 1 \neq \mathfrak{M}257$.

45. Pentru $m = 1$ proprietatea este adevărată. Dacă $m \ge 2$, $2002^m \vdots 4$ și cum $2003 = 4k + 3$ rezultă că $2002^m + 2003 = 4h + 3$. Un număr de forma $4h + 3$ are un factor prim de forma $4t + 3$. Cum $2146 = 2 \cdot 29 \cdot 37$ rezultă că 2146^n nu are un factor prim de forma $4t + 3$ și deci enunțul se verifică.

46. Condiția se scrie $\frac{n+a}{b} + 1 + \frac{n+b}{a} + 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a + b + n)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.
Fie $(a,b) = d$, $a = d\alpha$, $b = d\beta$, $(\alpha,\beta) = 1$ și $d_1 = (\alpha + \beta, d)$. Avem $\alpha + \beta = d_1 s$, $d = d_1 d_2$ și $(s, d_2) = 1$. Din $\frac{n+a}{b} + \frac{n+b}{a} = k \in \mathbb{Z}$ rezultă $\frac{n+d\alpha}{d\beta} + \frac{n+d\beta}{d\alpha} = k$ și apoi $(d(\alpha+\beta)+n)\left(\frac{\alpha+\beta}{d\alpha\beta}\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{(d(\alpha+\beta)+n)s}{d_2\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$. Deoarece $(s, d_2\alpha\beta) = 1$ rezultă $n + d(\alpha + \beta) = kd_2\alpha\beta$ și deci $n = kd_2\alpha\beta - a - b$ cu $k \in \mathbb{Z}$.

47. Dacă $a = 0$ sau $b = 0$ se consideră $A = B = 1$. Dacă $ab \neq 0$ notăm $d = (a,b)$ și avem $a = d\alpha$, $b = d\beta$ cu $(\alpha,\beta) = 1$. Există $A, B \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\alpha B - \beta A = 1. \tag{1}$$

Arătăm cu A, B îndeplinesc condițiile cerute. Presupunem că există p prim cu $p \mid \alpha dn + A$ și $p \mid \beta dn + B$ și rezultă contradicția $p \mid \beta(\alpha dn + A) - \alpha(pdn + B) = \beta A - \alpha B = -1$.

48. Presupunem $a + c \mid c^2$ și $b + c \mid c^2$. Dacă există p prim, astfel ca $p \mid a + c$ și $p \mid b + c$ rezultă $p \mid c^2$, deci $p \mid c$ și $p \mid a + c - c = a$, $p \mid b + c - c = b$ însă $(a,b) = 1$. Așadar $(a + c, b + c) = 1$ și deci $(a + c)(b + c) \mid c^2$ adică $c^2 \ge (a + c)(b + c)$, adică o contradicție.

L. Panaitopol

49. Avem $\dfrac{ab+(-1)^n(a+b)^n+x^n+(-1)^{n-1}(a+b)^n}{a+b+x}=$

$=(-1)^n\dfrac{(a+b)^n+(-1)^n ab}{a+b+x}+x^{n-1}-(a+b)x^{n-2}+(a+b)^2x^{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}(a+b)^{n-1}$.

Alegem $x=(a+b)^n+(-1)^n ab-a-b$ și cerința e îndeplinită.

L. Panaitopol

50. Fie $S=\sum_{i=1}^{n} i^k$. Avem $2S=(1^k+n^k)+(2^k+(n-1)^k)+(3^k+(n-2)^k)+\ldots+$

$+(n^k+1)=\sum_{i=1}^{n}(i^k+(n+1-i)^k)$. Cum k este impar avem $i^k+(n+1-i)^k=$

$=(i+n+1-i)(i^{k-1}-i^{k-2}(n+1-i)+i^{k-3}(n+1-i)^2+\ldots+(n+1-i)^{k-1})$ și deci $2S\vdots n+1$.

Avem de asemenea $2S=(1^k+(n-1)^k)+(2^k+(n-2)^k)+\ldots+((n-1)^k+1^k)+2n^k$.

Cum $i^k+(n-i)^k\vdots n$ rezultă $2S\vdots n$. Deoarece $(n,n+1)=1$ și $2S\vdots n$, $2S\vdots n+1$ rezultă $2S\vdots n(n+1)$ adică $S\vdots\dfrac{n(n+1)}{2}$.

51. Rezultă imediat că a, b, c au aceeași factori primi și cum $b=2^3\cdot 3^2$; factorii primi sunt 2 și 3. Fie $a=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$, $c=2^{\nu_1}\cdot 3^{\nu_2}$. Din $a^m\mid b^n$ rezultă

$m\alpha_1\le 3n$ (1)

$m\alpha_2\le 2n$ (2). Din $b^p\mid c^m$ rezultă

$3p\le m\nu_1$ (3)

$2p\le m\nu_2$ (4) iar din $c^n\mid a^p$ rezultă

$n\nu_1\le p\alpha_1$ (5)

$n\nu_2\le p\alpha_2$ (6)

Din (1) și (5) prin înmulțire avem $m\nu_1\le 3p$ și ținând seama de (3) rezultă $m\nu_1=3p$ și deci $\nu_1=\dfrac{3p}{m}$. Analog se arată că $\nu_2=\dfrac{2p}{m}$, $\alpha_1=\dfrac{3n}{m}$, $\alpha_2=\dfrac{2n}{m}$. Cum $\alpha_i,\nu_i\in\mathbb{N}$ rezultă $m\mid 2p$, $m\mid 3p\Rightarrow m\mid p$ și $m\mid 2n$, $m\mid 3n\Rightarrow m\mid n$ și deci $p=km$, $n=hm$. Avem deci $a=72^h$, $b=72^k$ cu $k,h\in\mathbb{N}^*$.

Altfel: avem $b^n=k_1a^m$, $c^m=k_2b^p$, $a^p=k_3c^n$ și deci $b^{np}=k_1^pa^{mp}$, $a^{mp}=k_3^mc^{nm}$ și deci $b^{np}=k_1^pk_3^mc^{nm}$ (*). Din $c^m=1/2b^p$ deducem $c^{mn}=k_2^nb^{pn}$ (**) și înmulțind (*) cu (**) avem $k_1^pk_2^n\cdot k_3^m=1$ și deci $k_1=k_2=k_3=1$. Avem $b^n=a^m$, $c^m=b^p$ și deci $a=72^{\frac{n}{m}}$, $c=72^{\frac{p}{m}}$ unde $m\mid n$ și $m\mid p$.

L. Panaitopol

52. Pentru $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ cu p_i, $i\in\overline{1,k}$ numere prime distincte și $\alpha_i\ge 1$, numărul divizorilor este $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Notăm $a_n=10^{3n+1}+4(-1)^n$ și avem $a\vdots 4$. Rezultă $a_n=10(1000)^n+4(-1)^n=10(7\cdot 11\cdot 13-1)^n+4(-1)^n=10(\mathfrak{M}7+(-1)^n)+$

$+4(-1)^n=\mathfrak{M}7+14(-1)^n\vdots 7$. Avem $a_n=4\cdot 7\cdot b_n$ unde b_n este impar și $b_n\ge b_1=375$. Dacă b_n are un divizor prim diferit de 7 atunci a_n are cel puțin $3\cdot 2\cdot 2=12$ divizori. Dacă $b_n=7^k$ atunci $k>3$ și b_n are mai mult de $3\cdot 4=12$ divizori. Așadar b_n are cel puțin 11 divizori supraunitari.

L. Panaitopol

53. Presupunem că $a \notin \mathbb{N}$. Fie n natural astfel încât $na \notin \mathbb{N}$ și deci $\{na\} = na - [na] > 0$. Fie $b \in \mathbb{N}^*$ maxim, astfel ca $\{na\} < \frac{1}{b}$. Rezultă $\{na\} \geq \frac{1}{b+1}$ și deci $\frac{1}{b+1} \leq \{na\} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow 1 \leq (b+a)na - (b+1)[na] < 1 + \frac{1}{b}$. Pentru $m = (b+1)n$ se obține contradicția $[ma] = (b+1)[na] + 1 \not\equiv \mathfrak{M}[na]$.

54. Cum $n = \mathfrak{M}24 - 1$, divizorii lui n sunt de forma $d = \mathfrak{M}12 \pm 1$ sau $d = \mathfrak{M}12 \pm 5$; adică $d^2 = \mathfrak{M}24 + 1$. Avem $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{d|n \\ d<n/2}} \left(d + \frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{d|n \\ d<n/2}} \frac{n+d^2}{d}$. Cum $n + d^2 = \mathfrak{M}24 - 1 + \mathfrak{M}24 + 1 = \mathfrak{M}24$ și $(d, 24) = 1$ rezultă că $\sigma(n) \vdots 24$.

55. Numărul divizorilor este $(a+1)(b+1)$ iar media aritmetică este $m = \frac{(1+p+p^2+\ldots+p^a)(1+q+q^2+\ldots+q^b)}{(a+1)(b+1)}$. Dacă p și q sunt impari atunci putem alege $a = b = 1$ și avem $m = \frac{p+1}{2} \cdot \frac{q+1}{2}$. Dacă $p = 2$ și q este impar alegem $b = q$ și $a = q^2 + q^4 + \ldots + q^{q-1}$ și avem $m = \frac{(1+2+2^2+\ldots+2^a)(1+q+q^2+\ldots+q^q)}{(1+q^2+q^4+\ldots+q^{q-1})(q+1)}$. Cum $1+q+q^2+\ldots+q^q = (1+q^2+q^4+\ldots+q^{q-1})(q+1)$ rezultă $m = 1+2+2^2+\ldots+2^a = 2^{a+1} - 1$. Dacă p este impar și $q = 2$ alegem $b = p^2 + p^4 + \ldots + p^{p-1}$ și $a = p$.

L. Panaitopol

56. Numărul căutat n se divide cu $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ și deci $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} 11^{\alpha_5} 13^{\alpha_6} \ldots$ cu $\alpha_1 \geq 4$, $\alpha_2 \geq 2$, $\alpha_3 \geq 1$, $\alpha_4 \geq 1$, $\alpha_5 \geq 0$ .... Numărul divizorilor este $\tau(n)$, $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Pentru $k \geq 6$ avem contradicția $\tau(n) \geq 4 \cdot 3 \cdot 2^4 = 192$, deci $k \leq 5$. Scrierile convenabile ale lui 144 sunt $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2$. Numărul minim este $n = 2^5 \cdot 3^n \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110880$ și se divide cu 1, 2, 3, ..., 10.

57. Dacă N este impar atunci $d_2 + d_4$ este par și se obține contradicția $d_{d_5} \vdots 2$. Așadar N este par și deci $d_2 = 2$. Deoarece $d_{d_5} > d_6$ rezultă $d_5 \geq 7$. Cum $d_4 + 2$ divide pe d_{d_5} rezultă că $d_4 + 2$ este un divizor al lui n și deci $d_5 \leq d_4 + 2$.

Dacă $d_5 = d_4 + 1$ rezultă că $d_4 + 2 = d_6$. $d_4, d_4 + 1, d_4 + 2$ sunt divizor ai lui n și sunt numere consecutive deci $n \vdots 3$ adică $d_3 = 3$. Rezultă $d_4 \leq 2 \cdot 3 = 6$ și deci $d_5 = d_4 + 1 \leq 7$. Am arătat că $d_5 \geq 7$ și deci $d_5 = 7$, $d_6 = 8$. Rezultă $8 | N$ și deci se obține contradicția $d_4 = 2^2 = 4$. Rămâne deci numai cazul $d_5 = d_4 + 2$. Numerele N cu 16 divizori au formele: a) p^{15}; b) $p^7 q$; c) $p^3 q^3$; d) $p^3 qr$; e) $pqrs$, unde p, q, r, s sunt numere prime distincte. În cazul nostru unul dintre factori este 2.

a) Dacă $N \vdots 4$, observând formele lui N rezultă $N \vdots 8$ și deci $d_1 = 1, d_2 = 2$ și din $d_5 \geq 7$ deducem $d_4 \geq 5$. Rezultă că $d_3 = 4$ și deci $N \not\equiv \mathfrak{M}3$. Însă 8 este divizor adică $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Dacă $d_4 = 8$ atunci $d_5 = 10$ adică 5 este divizor al lui n și cum $d_3 = 4$ rezultă contradicția $d_4 = 5$. Dacă $d_5 = 8$ atunci $d_4 = 6$ și contradicția $(3, N) = 3$. Dacă $d_6 = 8$ atunci $d_5 \leq 7$. Dar din condiția $d_5 \geq 7$ amintită mai sus rezultă $d_5 = 7$, $d_4 = 5$ și 10 este divizor al lui N. Cum 9 nu este divizor rezultă $d_7 = 10$ și condiția $d_{d_5} = (d_2 + d_4)d_6$ nu se verifică. Rezultă deci $N \not\equiv \mathfrak{M}4$.

b) Dacă $N \vdots 3$ atunci $d_3 = 3$, $6 \mid N$, $d_4 \leq 6$. Dacă $d_4 = 5$ atunci $d_5 = 7$ și deci $d_7 = 7d_6 \geq 7 \cdot 8 = 56$. Însă 10 și 14 sunt divizori adică $d_6 \leq 10$, $d_7 \leq 14$, contradicție. Dacă $d_4 = 6$ rezultă $d_5 = 8$, în contradicție cu $4 \nmid N$.

c) $N \not\equiv \mathfrak{M}3$ și $N \not\equiv \mathfrak{M}4$. Rezultă $d_3 = p$ cu p prim $p \geq 5$ și $d_4 \geq 7$. Dacă $d_4 = 2d$ atunci d este impar și $d_5 = d_4 + 2 = 2(d + 1) \vdots 4$ și deci $n \vdots 4$. Așadar d_4 este impar. Cum $d_k \neq \mathfrak{M}3$ și $d_4 + 2 \neq \mathfrak{M}3$ rezultă $d_4 = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $7 \leq d_5 \leq 16$ rezultă $5 \leq d_4 \leq 14$ și $k \in \{0,1\}$ adică $d_4 \in \{5,11\}$. Dacă $d_4 = 5$ rezultă contradicție cu $d_3 \geq 5$. Dacă $d_4 = 11$ atunci $d_5 = 13$ și $d_3 \in \{5, 7\}$. Pentru $d_3 = 5$ avem $2 \cdot 5 = 10$ divizori și deci $d_4 \leq 10$. Pentru $d_3 = 7$ obținem numărul $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$ care corespunde condițiilor problemei. Din raționamentul de mai sus rezultă și unicitatea soluției.

3. PĂTRATE PERFECTE

58. Pentru $n = 1$ și $n = 3$ găsim pătratele 1 și 9. Numerele $n = 2$ și $n = 4$ nu convin. Pentru $n \geq 5$ numărul este $\mathfrak{M}10 + 3$ și deci nu este pătrat perfect.

59. Avem $M = 5 + 2(10 + 10^2 + \ldots + 10^{1998}) + (10^{2996} + 10^{2000} + \ldots + 10^{2996}) =$

$$= 5 + 20\frac{10^{1998} - 1}{9} + 10^{1999}\frac{10^{1997} - 1}{9} = \left(\frac{10^{1988} + 5}{3}\right)^2.$$

Cum $10^{1988} + 5 = (\mathfrak{M}3 + 1)^{1988} + 5 = \mathfrak{M}3 + 1 + 5 = \mathfrak{M}3$ rezultă enunțul.

60. Avem $4(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10 + 1) - 8(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) =$

$$= \frac{4 \cdot (10^{2n} - 1)}{9} - 8\frac{10^n - 1}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} - 8 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{2(10^n - 1)}{3}\right)^2.$$

61. Avem $10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}$ și deci

$$M = \frac{10^n - 1}{9}(10^n + 5) + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2, \text{ unde } \frac{10^n + 2}{3} \in \mathbb{N}.$$

62. Avem $10^3-1=27\cdot 37$.
Dacă $n=3k$ atunci $10^{3k}-1=(10^3-1)(10^{3(k-1)}+10^{3(k-2)}+\ldots+10^3+1)=\mathfrak{M}37+0$.
Dacă $n=3k+1$ avem $10^{3k+1}-1=10\cdot 10^{3k}-1=10(\mathfrak{M}37+1)-1=\mathfrak{M}37+9$.
Dacă $n=3k+2$ avem $10^{3k+2}=10^2\cdot 10^{3k}-1=10^2(\mathfrak{M}37+1)-1=\mathfrak{M}37+99=$
$=\mathfrak{M}37+25$. Așadar resturile sunt 0^2, 3^2, 5^2.

63. Avem $13^n+2=(\mathfrak{M}3+1)^n+2=\mathfrak{M}3+1+2=\mathfrak{M}3$ și deci 13^n+2 este număr compus. Avem $13^n+2=(\mathfrak{M}4+1)^n+2=\mathfrak{M}4+1+2=\mathfrak{M}4+3$ însă pătratul unui număr impar este de forma $\mathfrak{M}4+1$. Vom stabili forma cuburilor perfecte în raport cu împărțirea la 13. Dacă $x=\mathfrak{M}13$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 1$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\pm 1$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 2$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\mp 5$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 3$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\pm 1$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 4$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\mp 1$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 5$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\mp 5$. Dacă $x=\mathfrak{M}13\pm 6$ atunci $x^3=\mathfrak{M}13\mp 5$. Deci în nici unul dintre cazuri nu avem $x^3=\mathfrak{M}13+2$. Așadar nu există x astfel ca $x^3=13^n+2$.

L. Panaitopol

64. Presupunem că $a^2+4b=x^2$ și $b^2+4a=y^2$ cu $x,y\in\mathbb{N}^*$. Putem considera $a\geq b$ și avem $a^2<x^2<a^2+4a<(a+2)^2$ și deci $x^2=(a+1)^2$ adică $x=a+1$ obținem contradicția $a^2+4b=(a+1)^2$ adică $2(2b-a)=1$.

65. Fie x *minim* astfel ca $x^2>n^3$ deci $x>n\sqrt{n}$ adică $x=[n\sqrt{n}]+1$.
Pătratele din interval sunt $x^2,(x+1)^2\ldots$. Al n-lea pătrat este $(x+n-1)^2$ și este în afara intervalului și deci $(x+n-1)^2\geq 2n^3$. Cum $x+n-1\leq n\sqrt{n}+n$ rezultă
$(n(\sqrt{n}-1))^2\geq 2n^3$ adică $(\sqrt{n}+1)^2\geq n\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{n}+1\geq n\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{n}\leq\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n\leq 3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow n\leq 5$. Verificările făcute pentru $n\leq 5$ atestă că rezultatul este $n\in\overline{2,5}$.

L. Panaitopol

66. Dacă cifrele sunt a condiția devine $x^2-1111a\vdots 10^4$ unde $a\in\{0,1,4,5,6,9\}$. Dacă a este impar atunci x este impar și avem $x=2k+1$ și $(2k+1)^2-1111a\vdots 10^4$. Deoarece $4k(k+1)\vdots 8$ și $1111=139\cdot 8-1$ rezultă că $a+1\vdots 8$ ceea ce este în contradicție cu $a\in\{1,5,9\}$. Dacă a este par avem $x=2k$ și $4k^2-1111a\vdots 10^4$ și deci $a\vdots 4$ adică $a\in\{0,4\}$. Pentru $a=4$ rezultă $4k^2-4\vdots 8$ și deci $k=2h+1$. Avem $4(2h+1)^2-4(139\cdot 8-1)\vdots 16$ și deci contradicția $M16+8\vdots 16$. Rămâne numai posibilitatea $a=0$.

L. Panaitopol

67. Pentru numerele mai mici ca 1000 se face verificarea. Pentru numerele cu cel puțin patru cifre, rezultă din problema precedentă că dacă acestea sunt identice ele sunt 0. Contradicție.

Oblath

68. $k = 3$ convine deoarece $1^k + 2^k + ... + n^k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Pentru $n = 2$ avem $1^k + 2^k = x^2$ și deci $2^k = (x-1)(x+1)$ adică $x-1 = 2^a$, $x+1 = 2^b$ cu $a+b = k$ și $b > a$. Rezultă $2^b - 2^a = 2$ și deci $2^{b-1} - 2^{a-1} = 1$. Cum 2^{b-1} este par rezultă 2^{a-1} impar și deci $a = 1$ și $x = 3$. Avem $1^k + 2^k = 9$ și deci $k = 3$.

69. Fie $n^2 + 3^n = m^2$ adică $(m-n)(m+n) = 3^n$. Rezultă $m-n = 3^k$, $m+n = 3^h$ cu $h > k$ și $h+k = n$. Rezultă $3^k \mid 2m$ și $3^k \mid 2n$ și deci $3^k \mid m$ și $3^k \mid n$.

Din $m = 3^k m_1$, $n = 3^k n_1$ rezultă $m_1 - n_1 = 1$ și $m_1 + n_1 = 3^{h-k}$ adică $m_1 = \frac{3^{h-k}+1}{2}$, $n_1 = \frac{3^{h-k}-1}{2}$. Rezultă $n = \frac{3^h + 3^k}{2}$ și cum $n = k+h$ avem $3^h + 3^k = 2(k+h)$ cu $h > k$. Pentru $h \geq 3$ avem $3^h > 4h > 2(k+h)$, contradicție. Deci $h \leq 2$ adică $m+n \leq 3^2 = 9$. După verificări rezultă soluțiile $(n,m) \in \{(1,2),(3,6)\}$.

70. Arătăm prin inducție că $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{k+1} = F_{n+1}^2$ pentru orice n par.

Pentru $n = 2$ proprietatea este adevărată. Dacă $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{k+1} = F_{n+1}^2$ atunci

$$\sum_{k=0}^{n+2} F_k F_{k+1} = F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+3} = (F_{n+3} - F_{n+2})^2 + (F_{n+3} - F_{n+2})F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+3} = F_{n+3}^2$$

ceea ce confirmă enunțul.

71. a) Arătăm că $8k+7 \neq x^2 + y^2 + z^2$ cu $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Dacă $x^2 + y^2 + z^2$ este impar atunci avem cazurile: a) x, y, z sunt impare și avem $x^2 + y^2 + z^2 = \mathfrak{M}8 + 1 + \mathfrak{M}8 + 1 + \mathfrak{M}8 + 1 = \mathfrak{M}8 + 3$, contradicție.

b) $x = 2a, y = 2b, t = 2c+1$ și avem $x^2 + y^2 + z^2 = 4(a^2 + b^2) + \mathfrak{M}8 + 1$. Dacă $a^2 + b^2 = 2h$ atunci $x^2 + y^2 + z^2 = \mathfrak{M}8 + 1$. Dacă $a^2 + b^2 = 2h+1$ atunci $x^2 + y^2 + z^2 = \mathfrak{M}8 + 5$. Așadar $8k+7 \neq x^2 + y^2 + z^2$. Vom arăta ca numerele $4^\alpha(8k+7)$ nu sunt sume de trei pătrate. Pentru $\alpha = 0$ demonstrația a fost făcută. Presupunem că există $\alpha \geq 1$ astfel ca $4^\alpha(8k+7) = x^2 + y^2 + z^2$. Dacă x, y sunt impare și z este par atunci $x^2 + y^2 + z^2 = \mathfrak{M}8 + 2 \neq 4^\alpha(8k+7)$. Dacă $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ atunci $4^{\alpha-1}(8k+7) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$. Procedând analog ajungem la contradicția $8k+7 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2$.

72. Fie $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \neq c$, $a \neq d$. Presupunem $a > c$ și avem $d > b$, $(a-c)(a+c) = (d-b)(d+b)$ adică $\frac{a-c}{d-b} = \frac{d+b}{a+c} = \frac{u}{v}$ unde $u, v \in \mathbb{N}^*$, $(u,v) = 1$. Rezultă că există $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\begin{cases} a-c = \alpha u \\ d-b = \alpha v \end{cases}$ și $\begin{cases} d+b = \beta u \\ a+c = \beta v \end{cases}$. Rezultă de

aici $a=\frac{1}{2}(\alpha u+\beta v)$, $b=\frac{1}{2}(\beta u-\alpha v)$ și deci $u=a^2+b^2=\frac{1}{4}((\alpha u+\beta v)^2+(\beta u-\alpha v)^2)=$

$=\frac{1}{4}(u^2+v^2)(\alpha^2+\beta^2)$. Dacă $\alpha=1$ și $\beta=1$ atunci $a-c=d+b$ și $d-b=a+c$.

Adunând aceste relații rezultă contradicția $b+c=0$. Deci $\alpha^2+\beta^2\geq 1^2+2^2=5$ și analog $u^2+v^2\geq 5$.

Cum $n=\frac{(u^2+v^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4}$ și $\frac{u^2+v^2}{4}>1$, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}>1$ rezultă că n este compus.

73. Avem $b-a=r$ și deci $c=b+r$. Presupunem că $a^2+b^2+c^2=d^2$ și deci $(b-r)^2+b^2+(b+r)^2=d^2$ adică $3b^2+2r^2=d^2$. Fie $D=(b,r,d)$ și $b=Dx$, $r=Dy$, $d=Dz$. Avem $(x,y,z)=1$ și $3x^2+2y^2=z^2$ și deci $3(x^2+y^2)=y^2+z^2$. Avem $3\mid y^2+z^2$ și deci $3\mid y$ și $3\mid z$. Rezultă $9\mid 3x^2$ adică $3\mid x$ și apoi contradicția $3\mid(x,y,z)=1$.

74. Presupunem că întregii au aceeași paritate. Dacă a și b sunt pare atunci $a^2+b^2+1=4t+1=(2t+1)^2-(2t)^2$ și deci punem $d=2t+1$ și $c=2t$. Dacă a și b sunt numere impare atunci $a^2+b^2+1=4t+3=(2t+2)^2-(2t+1)^2$ și luăm $d=2t+2$, $c=2t+1$. Reciproc, dacă $a=2\alpha$, $b=2\beta+1$ atunci $a^2+b^2+1=4\alpha^2+4\beta^2+4\beta+$ $+1+1=4t+2$. Dacă $4t+2=d^2-c^2$ atunci d și c au aceeași paritate și rezultă contradicția $4t+2=\mathfrak{M}4$. Așadar, dacă a și b au parități diferite, atunci $a^2+b^2+1\neq d^2-c^2$.

I. Cucurezeanu

75. a) Presupunem că $a(a+1)(a+2)=b^2$. Dacă a este impar atunci $(a,a+1)=$ $=(a,a+2)=(a+1,a+2)=1$ și deci $a=x^2$, $a+1=y^2$, $a+2=z^2$. Din $y^2-x^2=1$ rezultă $x=0$ și contradicția $a=0$. Dacă a este par atunci $(a,a+1)=(a+1,a+2)=1$ și $(a,a+2)=2$ și deci $a=2x^2$, $a+1=y^2$, $a+2=2z^2$ și deci $z^2-x^2=1$ și din nou contradicția $a=0$.

b) Dacă $a(a+1)(a+2)(a+3)=b^2$ atunci avem $(a^2+3a)(a^2+3a+2)=b^2$ și deci $(a^2+3a+1)^2-b^2=1$ și rezultă contradicția $b=0$.

76. Cel mai mare divizor a două dintre aceste numere este cel mult 4. Dacă produsul este pătrat perfect, fiecare număr are una dintre formele: a^2, $2a^2$, $3a^2$, $6a^2$ și deci două dintre numerele au aceeași formă. Există deci $k\in\overline{1,6}$, $h\in\overline{1,4}$ cu $k(c^2-b^2)=h$. Cum c și $b\in\mathbb{N}^*$ singura posibilitate este $k=1$, $c=2$, $b=1$, $h=3$.

Printre numere există și 1 adică produsul este $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\neq n^2$ ceea ce evident este o contradicție.

77. Fie $n \geq 4$ și $P_n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
Pentru $n = 4,5,6$, P_n nu este pătrat perfect. Fie $n \geq 7$. Vom scrie P_n sub forma
$P_n = (n^2-3n)(n^2-3n+2)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = [(n^2-3n+1)^2-1]\cdot$
$\cdot[(n^2+5n+5)^2-1]$. Notăm $n^2-3n+1 = a$, $n^2+5n+5 = b$. Avem $P_n = (a^2-1)\cdot$
$\cdot(b^2-1) = (ab-1)^2-(a-b)^2$ și cum $b > a$ avem $P_n < (ab-1)^2$. Deasemenea
$P_n > (ab-2)^2 \Leftrightarrow a^2b^2-a^2-b^2+1 > a^2b^2-4ab+4 \Leftrightarrow 2ab-(a-b)^2-3 > 0$
$\Leftrightarrow 2(n^2-3n+1)(n^2+5n+5)-(8n+4)^2-3 > 0 \Leftrightarrow 2n^4+4n^3-82n^2-84n-9 > 0$
$\Leftrightarrow 2n^3(n-7)+18n^2(n-7)+n(43n-84)+n^2-9 > 0$ ceea ce este adevărat pentru $n \geq 7$.
Cum $(ab-2)^2 < P_n < (ab-1)^2$ rezultă că P_n nu este pătrat perfect.

78. Un astfel de triplet este (8, 9, 10) deoarece $8 = 2^2+2^2$, $9 = 3^2+0^2$, $10 = 3^2+1^2$. Vom arăta cum dintr-un triplet $(a, a+1, a+2)$ se construiește un triplet cu numere mai mari. Fie $a = x^2+y^2$, $a+1 = z^2+t^2$, $a+2 = u^2+v^2$. Considerăm
$A = a(a+2)$ și avem $A = (x^2+b^2)(m^2+v^2) = (xu-yv)^2+(xv+yu)^2$,
$A+1 = (a+1)^2+0^2$ și $A+2 = (a+1)^2+1^2$ și am obținut astfel tripletul convenabil $(A, A+1, A+2)$.

L. Panaitopol

79. Avem $\sum_{k=1}^{n-1} x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right) =$
$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Așadar $A = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ și $B = A+\frac{n(n+1)}{2}$. Fie $x = [\sqrt{A}]+1$.
Rezultă $x^2 > A$. Arătăm că $(x+1)^2 < B$ adică $x+1 < \sqrt{B}$ și deci $[\sqrt{A}]+2 < \sqrt{B}$. Este suficient să arătăm că $\sqrt{A}+2 < \sqrt{B} \Leftrightarrow \sqrt{A}+2 < \sqrt{A+\frac{n(n+1)}{2}} \Leftrightarrow A+4+4\sqrt{A} < A+$
$+\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \sqrt{A} < \frac{n^2+n-8}{8} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{6} < \frac{(n^2+n-8)^2}{64} \Leftrightarrow (n^2+n-8)^2 >$
$> \frac{32}{3}n(n+1)(n+2) \Leftrightarrow 3n^4-26n^3-141n^2-80n+64 > 0 \Leftrightarrow 3n^2(n-13)+$
$+13n^2(n-13)+28n^2-80n+64 > 0$ ceea ce este adevărat pentru $n \geq 13$. Pentru $n = 10, 11, 12$, enunțul se verifică. De exemplu pentru $a = 10$, $A = 220$, $B = 275$. Între A și B se află pătratele 15^2, 16^2.

V. Zidaru, M. Lascu

80. Fie $p > \frac{n^2+n}{2}$ un număr prim. Alegem $a_i = ip$, $i \in \overline{1,n}$ și avem
$s = a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k} = p(i_1+i_2+\ldots+i_k) \leq p(1+2+\ldots+n) = \frac{pn(n+1)}{2}$ și $s = pq$, unde
$q \leq \frac{n(n+1)}{2} < p$. Cum $q \neq \mathfrak{M}p$, rezultă că s nu este pătrat perfect.

81. Din $a+c=x^2$ rezultă $2b=x^2$ și deci $x=2t$ adică $b=2t^2$.
Cum $a+b=y^2$ și $b+c=z^2$ rezultă $a=y^2-2t^2$ și $c=z^2-2t^2$.
Așadar $y^2-2t^2+z^2-2t^2=4t^2$ și deci $y^2+z^2=8t^2$ adică $(y+z)^2+(y-z)^2=(4t)^2$.
Alegem $y-z=4s$, $y+z=2(s^2-1)$ și deoarece $(4s)^2+(2(s^2+1))^2=(2(s^2-1))^2$
obținem $t=\frac{s^2+1}{2}$. Este necesar să considerăm s impar și obținem
$a=\frac{s^4+8s^3+2s^2-8s+1}{2}$; $b=\frac{(s^2+1)^2}{2}$, $c=\frac{s^4-8s^3+2s^2+8s+1}{2}$.
Rezultă imediat că $(a,b,c)=2$.
Observație. Nu putem avea $(a,b,c)=1$ deoarece din $y^2+z^2=8t^2$ rezultă că y și z sunt pare. Cum $b=2t^2$, $a=b^2-2t^2$, $c=z^2-2t^2$ rezultă $2\mid(a,b,c)$.

L. Panaitopol

82. Fie A, B, C cele trei pătrate de două cifre și n^2 pătratul de șase cifre. Avem A, B, $C\in\{16, 25, 36, 49, 68, 81\}$ și deci $161616\le n^2\le 818181$ adică $n\in[402,904]$. Notăm $n=\overline{xyz}$ și rezultă $x\ge 4$.

a) Fie $x=4$. Avem $n^2\le 168181$ și deci $n<410{,}099$. Cum 410^2 nu corespunde enunțului rezultă $y=0$ și $n=\overline{40z}$ adică
$n^2=(400+z)^2=160000+800z+z^2=160000+100B+C$ și deci $100(8z-B)=C-z^2$.

Cum $100\mid C-z^2$ și $|C-z^2|<100$ rezultă $C=z^2$ și apoi $B=8z$. Cum B este pătrat perfect rezultă $z\in\{2,8\}$. Dar C are două cifre și deci $z\ge 4$. Convine $z=8$ și avem $n=408$.

b) Fie $x\ge 5$. Avem $n^2=(100x+10y+z)^2=10000A+100B+C$ și deci $10000x^2+2000xy+\ldots=10000A+100B+C$. Dacă $y\ge 1$ avem $2000xy\ge 10000$ și deoarece $100B+C<10^4$ rezultă $A>x^2$. Cum $A<(x+1)^2$ rezultă contradicția A nu este pătrat perfect. Așadar $y=0$ și deci $10000x^2+200xz+z^2=10000A+100B+C$. Cum $A\le x^2$ avem $A=x^2$, $B=2xz$, $C=z^2$. Convine numai $x=8, z=4$ și deci $n=804$.

M. Becheanu

83. Presupunem că $x+y+z=a^2$, $a\in\mathbb{N}$.

Avem $x^2+y^2+z^2<(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)$ adică $1993<a^4<3\cdot 1993$ și deci $6<a<9$. Deoarece $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ și cum $x^2+y^2+z^2=1993$ este impar rezultă că $x+y+z=a$ este impar și deci $a=7$.
Din $x^2+y^2+z^2=1993$ și $x+y+z=7$ deducem $y+z=49-x$ și apoi $(y+z)^2\ge$ $\ge y^2+z^2$ adică $(49-x)^2\ge 1993-x^2$. Așadar $x^2-49x+204\ge 0$. Rezultă $x\ge\frac{49+\sqrt{1585}}{2}$ sau $x\le\frac{49-\sqrt{1585}}{2}$. În primul caz $x>45$ și deci $x^2>2025>1993=$ $=x^2+y^2+z^2$. În al doilea caz avem $x\le 4$ și analog $y\le 4$, $z\le 4$ ceea ce contrazice $x+y+z=49$.

M. Becheanu

84. Fie $a \le b \le c \le d$ și $d = n^2$. Avem $1989 \le 4d^2 = 4n^4$ și deci $n \ge 4{,}72...$ adică $n \ge 5$. Pe de altă parte $1989 > d^2 = n^4$ adică $n \le 6{,}67...$ și deci $n \le 6$. Cum $a^2+b^2+c^2+d^2$ este impar rezultă că și m este impar. Pentru $n = 5$ avem $d = 25$ și relațiile se scriu $a^2+b^2+c^2 = 1360$ și $a+b+c = m^2-25$. Deoarece $(a+b+c)^2 \le$ $\le 3(a^2+b^2+c^2)$ rezultă $m^2-25 \le \sqrt{3\cdot 1360}$ și deci $m \le 9$. Cum $(a+b+c)^2 >$ $> a^2+b^2+c^2$, avem $m^2-25 > \sqrt{1360} > 36$, deci $m^2 > 61$ și $m \ge 8$. Cum m este impar rezultă $m = 9$ adică $a+b+c = 56$. Deoarece $a^2+b^2+c^2 = 1360 = \mathfrak{M}4$ rezultă că a, b, c sunt pare. Cum $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 340 = \mathfrak{M}4$ rezultă că $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sunt pare adică $a = 4A$, $b = 4B$, $c = 4C$. Avem $A+B+C = 14$ și $A^2+B^2+C^2 = 85$ și $A \le B \le C$. Rezultă $C = \overline{5,8}$ și nici una dintre valori nu este convenabilă. Pentru $n = 6$ avem $d = 36$ și deci $a^2+b^2+c^2 = 693$ și $a+b+c = m^2-36$ cu m impar. Rezultă $3c^2 > 693 > c^2$ și deci $c \in \overline{16,26}$. Convine soluția $c = 18$, $b = 15$, $a = 12$ și $m = 9$. Așadar $m = 9$ și $n = 6$.

85. Pentru $m \in \mathbb{Z}^*$ există un număr finit de numere $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care $m = x^2-y^2$ deoarece $x+y \mid m$. Dacă $E(n) = k^2$ cu $k \in \mathbb{N}$ atunci $4a^2E(n) = (2ak)^2$ și deci $4a^2c-b^2 = (2ak)^2-(2a^2n+b)^2$. Presupunând că există o infinitate de numere n pentru care are loc egalitatea rezultă $4a^2c-b^2 = 0$ și deci $c = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Cum $c \in \mathbb{Z}$ rezultă $2a \mid b$ și contradicția $c = d^2$ cu $d \in \mathbb{Z}$.

86. Fie $a = 1023...9$, $n > 31$ și pătratul perfect $k = \left(\left[\sqrt{10^n a}\right]+1\right)^2$. Avem $k > 10^n a$ și $k \le \left(\sqrt{10^n a}+1\right)^2 = 10^n a+2\sqrt{10^n a}+1 < 10^n a+10^{n-10}$ deoarece $2\sqrt{10^n a}+1 < 3\sqrt{10^n a} < \sqrt{10^n\cdot 9a} < \sqrt{10^n\cdot 10^{11}} < 10^{n-10}$. Cum $10^n a < k < 10^n a+10^{n-10}$ rezultă că el conține toate cifrele lui a.

87. Presupunem $x^2+y^2 = z^2$ și $xy = t^2$ rezultă $y = \frac{t^2}{x}$ și $x^4+t^4 = (xz)^4$. Însă ecuația $a^4+b^4 = c^2$ nu are soluții în numere întregi nenule (vezi problema 129).

L. Panaitopol

88. Pentru $n = 2$ există numărul $25 = 5^2$. Fie $n \ge 3$. Orice număr natural are forma $a = 500k \pm r$ cu $|r| \le 250$. Rezultă $a^2 = \mathfrak{M}1000+r^2$. Dintre numerele r^2 cu $r \in \overline{0,250}$ nici unul nu are ultimele 3 cifre egale cu 5 iar singurul care conține 2 cifre 5 din ultimele 3 este $166^2 = 27556$. Deci ar putea fi pătrate perfecte numai numerele $x_n = 55...56$. Ar urma ca $4x_n$ să fie pătrat perfect. Însă $4x_n$ se termină cifrele 224 și nu este pătrat perfect pentru că dintre numerele r^2 cu $r \in \overline{0,250}$ nici unul nu are ultimele trei cifre 224.

89. Construim un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 5, a_2 = 25$. Dacă $a_n^2 - a_n = 10^{k_n} x_n$, $x_n \neq \mathfrak{M}10$ atunci $a_{n+1} = 10^{k_n} y_n + a_n$ unde y_n este ultima cifră a lui x_n. Avem $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = 10^{2k_n} y_n^2 + 2y_n a_n 10^{k_n} + a_n^2 - a_n - 10^{k_n} y_n = 10^{2k_n} y_n^2$. Cum $a_n = 5c_n$ și $x_n - y_n = 10d_n$ avem $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = 10^{k_n+1}(10^{k_n-1} y_n^2 + 2y_n c_n + d_n) = 10^{k_{n+1}} x_{n+1}$ cu $x_{n+1} \neq \mathfrak{M}10$ și $k_{n+1} \geq k_n + 1$.

D. Pompei

4. ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE

90. Relația se scrie $4a^3 - 1 = 7(b^3 + 286)$ și deci $7 \mid 4a^3 - 1$.

Avem $a = 7k + \alpha$, $\alpha \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ și deci $7 \mid 4(7k+\alpha)^3 - 1$ adică $7 \mid 4\alpha^3 + 1$. Verificând pe rând valorile posibile ale lui α se constată că $4\alpha^3 + 1 \neq \mathfrak{M}7$. Deci nu există numerele a și b.

L. Panaitopol

91. Pentru $y = 1$ avem $x^2 = 2023$ și $x \notin \mathbb{N}$. Pentru $y = 2$ avem $x^2 = 2025$ și $x = 45$. Pentru $y \geq 3$ rezultă $x^2 = 2021 + 2^y = \mathfrak{M}8 + 5$. Cum x este impar rezultă $x^2 = \mathfrak{M}8 + 1$ și cum $\mathfrak{M}8 + 1 \neq \mathfrak{M}8 + 5$ rezultă că singura soluție este (45, 2).

92. Orice număr întreg x se scrie sub forma $x = 5x + \alpha$ cu $\alpha \in \{0,\pm 1,\pm 2\}$ și deci x^2 este de forma $x^2 = 5h + \beta$ unde $\beta \in \{0,\pm 1\}$ și $x^4 = 5m + \gamma$ unde $\gamma \in \{0,1\}$. Așadar $3x^4 + 4 = 5n + \delta$ unde $\delta \in \{4,2\}$ iar $y^4 = 5p + \varepsilon$ unde $\varepsilon \in \{0,1\}$. Așadar $3x^4 + 4 \neq y^4$.

93. Avem $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{x-1}{2} + 1\right)^2 + \frac{(x-3)(x+1)}{4} =$

$= \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{5}{4}x^2$. Pentru $x < -1$ și $x > 3$ avem $\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 > y^2 >$

$> \left(x^2 + \frac{x-1}{2} + 1\right)^2$ și deci $a = x^2 + \frac{x}{2} + 1 > |y| > x^2 + \frac{x-1}{2} + 1 = a - \frac{1}{2}$. Dacă x este par, atunci $a \in \mathbb{N}$ și avem $a > |y| > a - 1$. Dacă x este impar, atunci $a - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ și $a + \frac{1}{2} >$

$> |y| > a - \frac{1}{2}$ deci $|y| \notin \mathbb{N}$. Verificând valorile lui x din $\overline{-1,3}$ găsim soluțiile $x = -1$, $y = \pm 1$; $x = 0$, $y = \pm 1$; $x = 3$, $y = \pm 11$.

94. Avem $(p-q)((p-q)^2 + 1) = 2p$ și deci $p - q \geq 1, (p-q)^2 + 1 \geq 2$. Cum $p - q < p$ rezultă $p - q = 2$ și apoi $p = 5, q = 3$.

95. Avem $x \neq y$ și $x^2+xy+y^2=7(x-y)$ adică $x^2+x(y-7)+y^2+7y=0$. Avem condiția $\Delta=(y-7)^2-4(y^2+7y)\geq 0$ adică $3y^2+42y-49\leq 0$ și deci $-15{,}08\leq y\leq 1{,}08$ adică $y\in\{-15,-14,...,-1,0,1\}$. Punând condiția ca Δ să fie pătrat perfect găsim soluțiile: $y=-15$, $x\in\{10,12\}$; $y=-14$, $x\in\{7,14\}$; $y=-12$, $x\in\{4,15\}$; $y=-10$, $x\in\{2,15\}$; $y=-7$, $x\in\{0,14\}$; $y=-4$, $x\in\{-1,12\}$; $y=-2$, $x\in\{-1,10\}$; $y=0$, $x\in\{7\}$; $y=1$, $x\in\{2,4\}$. Așadar ecuația are 17 soluții în numere întregi.

96. Notăm $S=x+y, P=xy$ și obținem $S^3-3SP+S^3+30P=2000$ adică $2(S^3-1000)=3P(S-10)$ și deci $(S-10)(2S^2+20S+200-3P)=0$. Rezultă $S=10$ sau $2S^2+20S+200=3P$. Cum $P\leq\frac{S^2}{4}$ rezultă $3P\leq\frac{3S^2}{4}$ și deci $2S^2+20S+200\leq\frac{3S^2}{4}\Leftrightarrow S^2+80S+800\leq 0\Leftrightarrow S^2+16S+160\leq 0$ și deci s-a obținut contradicția $(S+8)^2+96\leq 0$. Deci $x+y=10$.

97. Numerele $x, x+1, x+2, x+3$ dau resturi diferite la împărțirea cu 4 adică dau resturile 0, 1, 2, 3 (nu neapărat în această ordine). Pentru $x\geq 1$ primul membru este de forma $\mathfrak{M}4+6=\mathfrak{M}4+2$. Însă y^{2^k} cu $k\geq 1$, are forma $\mathfrak{M}4$ sau $\mathfrak{M}4+1$ și deci ecuația nu are soluții. Pentru $x\leq -4$ primul membru este negativ deci diferit de y^{2^x}. Rămân de verificat valorile $x\in\{-3,-2,-1,0\}$. Se găsesc soluțiile (–2, 16) și (0, 6).

A. Zanoschi

98. Rezultă imediat că $(a, b) = 1$. Dacă $a=b$ rezultă $a=b=1$. Fie $a > b$. Deoarece $\frac{a^3+1}{b^2}+b$ și $\frac{b^3+1}{a^2}+a$ sunt întregi rezultă $a^2\mid a^3+b^3+1$ și $b^2\mid a^3+b^3+1$ adică $a^2b^2\mid a^3+b^3+1$ și deci $a^3+b^3+1\geq a^2b^2$. Cum $2a^3\geq a^3+b^3+1$ rezultă $2a^3\geq a^2b^2$ și deci $a\geq\frac{b^2}{2}$. Deoarece $a^2\mid b^3+1$ rezultă $b^3+1\geq a^2\geq\left(\frac{b^2}{2}\right)^2$ și deci $b^4\leq 2(b^3+1)$. Cum $b^3(b-2)\leq 2$ rezultă $b = 1$ sau $b = 2$. Dacă $b = 1$, din $a^2\mid b^3+1$ rezultă $a=1$. Dacă $b = 2$ avem $4\mid a^3+1$ și $a^2\mid 9$ deci $a = 3$. Avem $(a,b)\in\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$.

99. Presupunem $b^2-a\mid a^2+b, a^2-b\mid b^2+a$. Dacă $a = b$ se obține contradicție. Fie $b > a$. Din $a^2+b\geq b^2-a$ rezultă $(b+a)\geq(b-a)(b+a)$ rezultă $1\geq b-a$ și cum $b>a$ rezultă $b=a+1$ și deci numerele sunt $n_1=1$ și $n_2=\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$.

Avem $n_2 = 1 + \frac{4a+2}{a^2-a-1} \in \mathbb{Z}$. Rezultă $4a+2 \geq a^2-a-1$ și deci $a^2-5a-3 \leq 0$, adică $a \leq 5$. Avem $\frac{4a+2}{a^2-a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 1$ sau $a = 2$. Soluțiile sunt (1, 2), (2, 3) și pentru $b < a$ avem (2, 1), (3, 2).

100. Ecuația se scrie $3^x(3^x-1) = y(y+2)(y^2+1)$. Avem soluțiile (0, 0), (1, 1). Fie $x \geq 2$. Dacă $y = \mathfrak{M}3 \pm 1$ atunci $y^2+1 = \mathfrak{M}3+2$. Dacă $y = \mathfrak{M}3$ atunci $y^2+1 = \mathfrak{M}3+1$. Așadar $y^2+1 \neq \mathfrak{M}3$. Rezultă că $3^x \mid y(y+2)$ și deci $3^x \mid y$ sau $3^x \mid y+2$. Așadar $y+2 \geq 3^x$ și deci $9^x - 3^x = y(y+2)(y^2+1) \geq (3^x-2)3^x(y^2+1) \geq 2 \cdot 3^x(3^x-2)$. Rezultă $3^x - 1 \geq 2(3^x-2) \Leftrightarrow 2^x \leq 3$, contradicție. Deci soluțiile sunt (0, 0) și (1, 1).

Gh. Iurea

101. Pentru $x \leq 2$ sau $y \leq 2$ nu avem soluții. Fie $x \geq 3$ și $y \geq 3$. Pentru $x = 2p$ avem $3^x + 5^x = 9^p + 25^p = 9^p - 1 + 25^p - 1 + 2$. Cum $9^p - 1 \vdots 8$ și $25^p - 1 \vdots 8$ rezultă că $3^x + 5^x = \mathfrak{M}8 + 2$ și deci $3^x + 4^x + 5^x = \mathfrak{M}8 + 2 \neq 6^y$ deoarece $y > 1$. Pentru $x = 2p+1$ avem $3^x + 5^x = 3 \cdot 9^p + 5 \cdot 25^p = 3 \cdot 9^p + 5 \cdot 9^p + 5(25^p - 9^p) = 8 \cdot 9^p + \mathfrak{M}16 = \mathfrak{M}16 + 8$. Cum $x \geq 3$ rezultă că $3^x + 4^x + 5^x = \mathfrak{M}16 + 8$. Așa încât din $3^x + 4^x + 5^x = 6^y$ adică $\mathfrak{M}16 + 8 = 6^y$ rezultă $y \leq 3$ și deci $y = 3$. Singura soluție este (3, 3).

102. Presupunem prin reducere la absurd că ecuația are soluții. Fie $n_0 \geq 3$ minim pentru care există $m \geq 1$ astfel ca $x^{n_0} - y^{n_0} = 2^m$. Dacă $n_0 = 2k$ atunci $(x^k - y^k)(x^k + y^k) = 2^m$ și deci $x^k - y^k = 2^k$ ceea ce contrazice minimalitatea lui n_0. Rezultă n_0 impar. Fie p_0 minim pentru care există x și y cu $x^{n_0} - y^{n_0} = 2^{p_0}$. Rezultă $p_0 \geq 1$ și $(x-y)(x^{n_0-1} + x^{n_0-2}y + \ldots + y^{n_0-1}) = 2^{p_0}$. Numerele x și y au aceeași paritate și cum $x^{n_0-1} + x^{n_0-2}y + \ldots + y^{n_0-1}$ trebuie să fie par, rezultă că x și y sunt pare. Pentru $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ obținem $x_1^{n_0} - y_1^{n_0} = 2^{p_0-n_0}$ și contradicția rezultă din $p_0 - n_0 < p_0$.

103. Fie $d = (x, y)$. Avem $x = da$, $y = db$, $(a, b) = 1$. Rezultă $a^n + b^n = 2^k$ și a, b impare. Presupunem n par și cum $a^2 = \mathfrak{M}8 + 1$, $b^2 = \mathfrak{M}8 + 1$ rezultă $a^n + b^n = \mathfrak{M}8 + 2$ și deci $k = 1$. Rezultă $a^n + b^n = 2$ adică $a = b = 1$ și soluția $x = y = d$. Din ecuație rezultă $2 \cdot d^n = 2^m$ adică $x^n = y^n = 2^{m-1}$ și deci $x = y = 2^{\frac{m-1}{n}}$ cu condiția $n \mid m-1$. Dacă n este impar relația se scrie $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}) = 2^k$. Cum $a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$ este impar rezultă $a + b = 2^k = a^n + b^n$ adică $a = b = 1$ și deci ca

și în cazul precedent $x = y = 2^{\frac{m-1}{n}}$ cu $n \mid m-1$. Așadar dacă $n \nmid m-1$ ecuația nu are soluții dacă $n \mid m-1$ soluțiile sunt $\left(2^{\frac{m-1}{n}}, 2^{\frac{m-1}{n}}\right)$.

L. Panaitopol

104. Dacă $p = 2$ atunci $m = 13$ și $k = 1$. Dacă $p \geq 3$ atunci $2^p + 3^p \vdots 5$. Pentru $p=5$ avem $2^p + 3^p = 255$ și deci $m = 255$ și $k = 1$. Pentru $p \neq 5$ arătăm că $2^p + 3^p \neq \mathfrak{M}25$. Într-adevăr $2^p + 3^p = 2^p + (5-2)^p = 2^p + \mathfrak{M}25 + 5p \cdot 2^{p-1} - 2^p =$ $= \mathfrak{M}25 + 5p2^{p-1} \not\equiv \mathfrak{M}25$ și deci $2^p + 3^p \neq m^k$ cu $k \geq 2$.

105. Pentru $3^x - 2^y = 1$ avem soluțiile $x = 1, y = 1$ și $x = 2, y = 3$. Dacă $x \geq 3$ și $x = 2k+1$ atunci $3^x - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3 \cdot 9^x - 1 = 2 \cdot 9^x + 9^x - 1 = 2 \cdot 9^x + (9-1) \cdot$ $\cdot (9^{x-1} + 9^{x-2} + \ldots + 9 + 1) = 2(9^k + 4 \cdot 9^{x+1} + \ldots + 4 \cdot 9 + 4)$ și deci $3^x - 1 \neq \mathfrak{M}4$ ceea ce contrazice $3^x - 1 = 2^y$ și $y \geq 2$. Așadar $x = 2h$ și avem $(3^h - 1)(3^h + 1) = 2^y$ și deci $3^h - 1 = 2^a$ și $3^h + 1 = 2^b$ cu $a + b = y$. Rezultă $2^b - 2^a = 2$ și deci $2^{b-1} - 2^{a-1} = 1$ și adică $a = 1$ și apoi $3^h = 3 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow x = 2$, contradicție. Pentru ecuația $2^y - 3^x = 1$ avem soluțiile $x = 0, y = 1$ și $x = 1, y = 2$. Fie $y \geq 3$. Avem $2^y - 1 = 3^x$ și $x > 2$. Dacă $y = 2k+1$ avem $2^y - 1 = 2 \cdot 4^k - 1 = 2(4^k - 1) + 1 = 2(4-1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 4 + 1) + 1 =$ $= \mathfrak{M}3 + 1$ și deci $2^y - 1 \neq 3^x$. Așadar $y = 2h$ și deci $(2^k - 1)(2^k + 1) = 3^x$ și apoi $2^k - 1 = 3^a$ și $2^k + 1 = 3^b$ cu $a + b = x$. Rezultă $3^b - 3^a = 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y = 2$, contradicție.

106. Avem $x = 1, y = 1$. Dacă $x > 1$ rezultă $y > 1$. Deoarece $x > y$ și $x^y = y^{x-y}$ rezultă $x - y > y$ adică $x > 2y$. Numerele x și y au aceeași divizori primi $x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $y = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$. Egalitatea din enunț se scrie $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i y} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i (x-y)}$ și deci $\forall\, i \in \overline{1,k}$ avem $\alpha_i y = \beta_i (x-y)$ adică $\frac{\alpha_i + \beta_i}{\beta_i} = \frac{x}{y} > 2$ și deci $\alpha_i + \beta_i > 2\beta_i \Leftrightarrow \alpha_i > \beta_i$ și deci $y \mid x$. Punem $x = yz$ cu $z \in \mathbb{N}, z > 2$ și avem $(yz)^y = y^{(z-1)y}$ și deci $yz = y^{z-1}$ adică $x = y^{z-2}, z > 2$. Astfel spus $x = y^t$ cu $t > 1$. Relația din enunț devine $y^{ty} = y^{y^t - y}$ și deci $y^{t-1} = t+1$ cu $t \geq 2$ și $y \geq 2$. Dacă $t = 2$ rezultă $y = 3$ și deci $x = 9$. Dacă $t = 3$ avem $y^2 = 4$ deci $y = 2$ și deci $x = 8$. Dacă $t \geq 4$ atunci $y^{t-1} \geq 2^{t-1}$ și $2^{t-1} > t+1$, contradicție. Deci soluțiile sunt (9, 3), (8, 2).

107. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Avem $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ și de aici $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$, $b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$. Cum $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ rezultă că $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ sunt soluții pentru ecuația $x^2 - 3y^2 = 1$. Ecuația $x^2 + 1 = 3y^2$ nu are soluții pentru că $x^2 + 1 \neq \mathfrak{M}3$.

108. Fie $n, a_n, b_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Avem și relația $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ și $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$. Pentru n par (a_n, b_n) sunt soluții pentru ecuația (1) iar pentru n par, (a_n, b_n) sunt soluții pentru ecuația (2).

109. Avem $x_0^2 - Dy_0^2 = 1$, $u^2 - dv^2 = k$ și $X^2 - DY^2 = (x_0u + Dy_0v)^2 - -D(x_0v + y_0u)^2 = x_0^2(u^2 - Dv^2) - Dy_0^2(u^2 - Dv^2) = = (x_0^2 - Dy_0^2)(u^2 - Dv^2) = k$. Fie ecuația $x^2 - 7y^2 = 1$ și pentru $n \in \mathbb{N}$ numerele $c_n, d_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $(8+3\sqrt{7})^n = = c_n + d_n\sqrt{7}$. Cum $(8-3\sqrt{7})^n = c_n - d_n\sqrt{7}$ rezultă $c_n^2 - 7d_n^2 = 1$. Pentru $u = 3$ și $v = 1$ avem $u^2 - 7v^2 = 2$. Rezultă că pentru $X_n = 3c_n + 7d_n$, $Y_n = c_n + 3d_n$ avem $X_n^2 - 7Y_n^2 = 2$ și deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se obțin soluții (X_n, Y_n) pentru ecuația (3).

110. Avem $x = y + 2 \pm \sqrt{y^2(1-\alpha) + 7y + 4 - \beta}$. Este necesar și suficient să avem

$$y^2(1-\alpha) + 7y + 4 - \beta = k^2,\ k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$\text{și deci } x = y + 2 \pm k. \tag{2}$$

a) (1) devine $y = \frac{k^2+1}{7}$. Considerând $k = 7h + \beta$ cu $\beta \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ se arată că $y \notin \mathbb{Z}$. Deci ecuația nu are soluții.

b) (1) devine $y = \frac{k^2-1}{7}$ și deci $k = 7h \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă $y = 7h^2 \pm 2h$. Ținem seama de (2) și obținem

$x = 7h^2 + 9h \pm 1$, $y = 7h^2 + 2h$;

$x = 7h^2 - 5h \pm 1$, $y = 7h^2 + 2h$;

$x = 7h^2 + 5h \pm 1$, $y = 7h^2 - 2h$;

$x = 7h^2 - 9h \pm 1$, $y = 7h^2 - 2h$.

c) (1) devine $4y^2+7y+3=k^2$ și rezultă $y=\frac{-7\pm\sqrt{16k^2+1}}{8}$ cu condiția $16k^2+1=h^2$, $h\in\mathbb{N}$ adică $(4k-h)(4k+h)=-1$ și deci $4k-h=-1$ și $4k+h=1$ și deci $k=0$, $h=1$. Soluția este $y=-1$, $x=1$.

d) Din $-y^2+7y=k^2$ rezultă $-y^2+7y\geq 0$ și deci $y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. După verificare se obțin soluțiile $y=0; x=2$ și $y=7, x=9$. Pentru $\alpha=-2, \beta=0$ relația (1) devine $3y^2+7y+4=k^2$ și deci $y=\frac{-7\pm\sqrt{1+12k^2}}{6}$. Este necesar ca $1+12k^2=h^2$ adică $h^2-3(2k)^2=1$ (3). Din (3) rezultă $(h,6)=1$ și deci $h=6e\pm 1$. Cum $y=\frac{-7\pm h}{6}$, alegând convenabil semnul lui h se obține $y\in\mathbb{Z}$ și deci condiția (3) este și suficientă. Această condiție echivalează cu existența soluțiilor ecuației $x^2-3y^2=1$ cu y par. Din $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n\in\mathbb{N}$ alegem n par și obținem $a_n^2-3b_n^2=1$ cu b_n par. Rezultă $k=\frac{b_n}{2}$, $h=a_n$ și obținem o infinitate de soluții (x,y).

5. ECUAȚII CU MAI MULTE NECUNOSCUTE

111. Avem identitatea $(3n+2)^2+(4n+1)^2-(5n+2)^2=1$. Dând valori naturale lui n găsim soluții distincte pentru ecuație.

112. Ecuația se scrie $x^2+(y-z)(y+z)=n$. Considerăm $y-z=1$ și obținem $y=\frac{n-x^2+1}{2}$ și $z=\frac{n-x^2-1}{2}$. Pentru ca $y,z\in\mathbb{Z}$ este suficient să alegem $x=2\lambda+1+n$, $\lambda\in\mathbb{Z}$.

113. Dacă $a\in\mathbb{Z}$ atunci $a=3k+\alpha$ cu $\alpha\in\{-1,0,1\}$. Avem $a^3=27k^3+$ $+27k^2\alpha+9k\alpha^2+\alpha^3=\mathfrak{M}9+\alpha^3$ și deci a^3 dă la împărțirea cu 9 resturile -1, 0, 1. Rezultă că $x^3+y^3+z^3$ este de forma $\mathfrak{M}9+r$ unde $r\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ și deci $x^3+y^3+z^3\neq m9\pm 4$, ceea ce înseamnă că ecuația dată nu are soluții.

114. Putem presupune $a\leq b\leq c$. Dacă $x=\mathfrak{M}3\pm 1$ atunci $x^3=(\mathfrak{M}3\pm 1)^3=$ $=\mathfrak{M}9\pm 1$. Dacă $x=\mathfrak{M}3$ atunci $x^3=\mathfrak{M}9$. Pentru că $2001=\mathfrak{M}9+3$ rezultă

$a=3\alpha+1$, $b=3\beta+1$, $c=3\gamma+1$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}$. Notăm $f(x)=3x^3+3x^2+x$ și ecuația devine $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=222$. Deoarece $f(4)=244>222$ rezultă $\alpha\le\beta\le\gamma\le 3$. Avem $f(0)=0$, $f(1)=7$, $f(2)=111$. Singura posibilitate este $\alpha=0$, $\beta=\gamma=2$ adică $a=1$, $b=c=10$. Avem deci soluțiile (1, 10, 10), (10, 1, 10), (10, 10, 1).

115. Căutăm o identitate de forma $(1+a)^3+(1-a)^3+b^3=2$ adică $6a^2+b^3=0$. Vom lua $a=6n^3$ și rezultă $b=-6n^2$. Avem $(1+6n^3)^3+(1-6n^3)^3+$ $+(-6n^2)^3=2$ și dăm lui n o infinitate de valori naturale.

116. Împărțim cu z, notăm $\frac{x}{z}=a$, $\frac{y}{z}=b$ și avem $a,b\in\mathbb{Q}$ și $2a+b=3$, $a^3+2b^3=3$. Substituind $b=3-2a$ în a doua relație obținem $5a^3-24a^2+36a-$ $-17=0$ cu singura rădăcină rațională $a=1$. Rezultă $b=1$ adică $x=y=z$. Cum $(x,y,z)=1$ rezultă $x=y=z=1$ sau $x=y=z=-1$.

D. Radu

117 Vom porni de la o soluție particulară $28^2+8^3=6^4$. Deoarece $[2,3,4]=12$ vom lua $x=28n^6$, $y=8n^4$, $z=6n^3$ și dând lui n valori naturale găsim soluții pentru ecuație.

118. Observăm că punând $(x+1)+(x+n)=0$ obținem $x=-\frac{n+1}{2}$ și de aici $(x+k)^3+(x+n+1-k)^3=0$. Deci pentru n impar avem soluția $\left(-\frac{n+1}{2},0\right)$. Pentru n par punem $(x+1)+(x+n-1)=0$ adică $x=-\frac{n}{2}$ și avem $(x+k)^3+(x+n-k)^3=0$ și rezultă $(x+n)^3=y^3$. Soluția este $\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$.

119. Rezultă imediat ca $(a,b)=1$, $(b,c)=1$, $(c,a)=1$ și de aici $\frac{ab+bc+ca+1}{abc}\in\mathbb{N}$. (1) Considerăm ordonarea $a\le b\le c$. Rezultă de asemenea $\frac{ab+ca+1}{bc}\in\mathbb{N}$. (2) Cum $ab\le bc$, $ca\le bc$, $1\le bc$ rezultă $\frac{ab+ca+1}{bc}\le 3$.

a) Dacă $\frac{ab+ca+1}{bc}=3$ atunci $a=b=c=1$.

b) Dacă $\frac{ab+ca+1}{bc}=2$ din (1) rezultă $\frac{3bc}{abc}=\frac{3}{a}\in\mathbb{N}$. Pentru $a=1$ rezultă $b+c+1=2bc$ și deci $c=\frac{b+1}{2b-1}\ge 1$ și deci $b=1$ și $c=1$ sau $b=2$ și $c=1$ care contrazice condiția $b\le c$. Pentru $a=3$ nu se obțin soluții cu $a\le b\le c$.

c) Dacă $\frac{ab+ac+1}{bc}=1$ din (1) rezultă $\frac{2bc}{abc}=\frac{2}{a}\in\mathbb{N}$. Pentru $a=1$ avem $b+c+1=bc$ și deci $c=\frac{b+1}{b-1}=1+\frac{2}{b-1}$ și deci $b=2$ și $c=3$ sau $b=3$ și $c=2$ cu contradicția $b>c$. Pentru $a=2$ avem $2b+2c+1=bc$ și deci $c=\frac{2b+1}{b-2}=2+\frac{5}{b-2}$ și deci $b=3$ și $c=7$ sau $b=7$ și $c=3$ cu contradicția $b>c$. Așadar soluțiile sunt (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 7) și permutările circulare.

L. Panaitopol

120. Putem presupune $a\le b\le c$. Dacă $a=0$ rezultă $|b+c|=2\Leftrightarrow b+c=2$ și deci $b=0$, $c=2$ sau $b=c=1$. Dacă $a\ge 3$ rezultă $c\ge b\ge 3$. Ecuația se scrie $\left|1-\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}\right|=\frac{2}{abc}$. Cum $ab\ge 9$, $bc\ge 9$, $ac\ge 9$ rezultă $1-\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}\ge$ $\ge 1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$ și contradicția $\frac{2}{abc}\ge\frac{2}{3}$. Rămân cazurile 1) $a=1$; 2) $a=2$.

1) Pentru $a=1$ avem $|bc-b-c-1|=2$ și de aici $(b-1)(c-1)=0$ sau $(b-1)(c-1)=4$ cu soluțiile $(b,c)\in\{(1,c),(2,5),(3,3)\}$.

2) Pentru $a=2$ avem $2b-b-c-2=\pm 2$ adică $(2b-1)(2c-1)=1$ sau $(2b-1)(2c-1)=9$. Cum $2\le b\le c$ rezultă $(b,c)=(2,2)$.

Avem deci soluțiile $(a,b,c)\in\{(0,0,2),(0,1,1),(1,1,c),(1,2,5),(1,3,3),(2,2,2)\}$ și permutările circulare.

M. Becheanu

121. Notăm $x+\frac{1}{y}=a$, $y+\frac{1}{z}=b$, $z+\frac{1}{x}=c$ și avem $a,b,c\in\mathbb{N}^*$. Rezultă $y=\frac{1}{a-x}$, $z=\frac{1}{b-y}=\frac{a-x}{ab-1-bx}$. Înlocuind în ultima relație obținem

$$(bc-1)x^2+(a-b+c-abc)x+ab-1=0 \qquad (1)$$

Dacă $bc=1$ rezultă $b=c=1$ și $a=1$. De aici avem $y=\frac{1}{1-x}$, $z=\frac{x-1}{x}$ și $yz=-\frac{1}{x}<0$, contradicție. Dacă $bc>1$ discriminantul ecuației (1) este $\Delta=(a-b+c-abc)^2-4(bc-1)(ab-1)=(abc-a-b-c)^2-4$. Pentru ca $x\in\mathbb{Q}$ este necesar și suficient ca $\Delta=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Cum $h-k$ și $h+k$ au aceeași paritate avem $h^2-4=k^2\Leftrightarrow(h-k)(k+h)=4\Leftrightarrow k-h=h+k=\pm 2$ adică $h=\pm 2$ și deci $|abc-a-b-c|=2$. Așa cum s-a eliminat cazul $bc=1$, se elimină și situațiile $ab=1$, $ac=1$ și deci $ac,bc,ab\ge 2$. Din rezultatele de la problema 120 se reține $(a,b,c)\in\{(1,2,5),(1,5,2),(1,3,3),(2,2,2)\}$.

Se găsesc $(x,y,z)\in\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2},2\right),\left(\frac{1}{2},2,1\right),\left(\frac{2}{3},3,\frac{1}{2}\right),(1,1,1)\right\}$ și soluțiile obținute prin permutări circulare.

M. Becheanu

122. Fie $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$ și $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=m$, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=n$. Avem deci $x+y+z=m$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n$ și $xyz=1$. Eliminând y și z obținem relația $x^3-mx^2+nx-1=0$ cu $x\in\mathbb{Q}$. Punând $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $(\alpha,\beta)=1$ rezultă $\alpha=\pm\beta$ adică $a=\pm b$. Analog se obține $b=\pm c$ deci $|a|=|b|=|c|$.

123. Notăm $x+y=S$, $xy=P$ și avem $S=3-z$ și apoi $(3-z)P=3z^2-9z+8$. Rezultă $z\neq 3$ și $P=\frac{3z^2-9z+8}{3-z}=-3z+\frac{8}{3-z}\in\mathbb{Z}$ și deci $3-z\in\{-1,1,2,-2,4,-4,8,-8\}$ adică $z\in A=\{4,2,1,5,-1,7,-5,11\}$. Ecuația $U^2-SU+P=0$ cu rădăcinile x și y, are discriminantul $\Delta=S^2-4P=(3-z)^2+12z-\frac{32}{3-z}=(z+3)^2-\frac{32}{z-3}$. Calculând Δ pentru valorile lui z din A se obține un pătrat perfect numai pentru $z=1$, $z=4$ și $z=-5$. Se obțin soluțiile (1, 1, 1), (−5,4,4), (4,−5,4),(4,4,−5).

124. Ecuația se scrie $x^2z+y^2x+z^2y=mxyz$ și deci $x\mid z^2y$, $y\mid x^2z$ și $z\mid y^2x$ cum $(x,y)=1$ și $(x,z)=1$ rezultă $x=\pm 1$. Analog $y=\pm 1$, $z=\pm 1$. Dacă $x=y=z=1$ sau $x=y=z=-1$ avem $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$. Dacă $x=1$, $y=-1$, $z=-1$ din $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=-1$ și deci $m=-1\notin\mathbb{N}$. Dacă $x=1$, $y=1$, $z=-1$ avem de asemenea contradicția $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=-1$.

125. Putem presupune $(x,y,z)=1$. Ecuația se scrie $x^2z+y^2x+z^2y=3xyz$. Notăm $d=(x,y)$ și avem $x=dx_1, y=dy_1, (x_1,y_1)=1$. Ecuația devine $dx_1^2z+d^2x_1y_1^2+y_1z^2=3dx_1y_1z$ cu $(d,z)=1$. Rezultă $d\mid y_1$ și notăm $y_1=dy_2$. Avem $x_1^2z+d^3x_1y_2^2+y_2z^2=3dx_1y_2z$ va rezulta $y_2\mid x_1^2z$. Cum $(y_2,x_1)=1$ avem $y_2\mid z$ și $z=y_2z_1$ și $x_1^2z_1+d^3x_1y_2+y_2^2z_1^2=3dx_1y_2z_1$. Avem $y_2\mid x_1^2z_1$ și deci $y_2\mid z_1$ adică $z_1=y_2z_2$ și ecuația devine $x_1^2z_2+d^3x_1+y_2^3z_2^2=3dx_1y_2z_2$. Deoarece $z_2\mid d^3x_1$ și $(d,z_2)=1$ avem $z_2\mid x_1$ adică $x_1=z_2x_2$. Se ajunge la $x_2^2z_2^2+d^3x_2+y_2^2z_2=3dx_2y_2z_2$. Cum $z_2\mid d^3x_2$ avem $x_2=z_2x_3$ și ecuația devine $x_3^2z_2^3+d^3x_3+y_2^3=3dx_3y_2z_2$. De aici rezultă $x_3\mid y_2^3$,

cum $(x_3, y_2) = 1$ avem $x_3 = 1$ și ecuația devine $z_2^3 + d^3 + y_2^3 = 3dy_2z_2$ adică $(z_2 + d + y_2)((z_2 - d)^2 + (d - y_2)^2 + +(y_2 - z_2)^2) = 0$ adică: i). $z_2 + d + y_2 = 0$. ii). $z_2 = y_2 = d$. În primul caz obținem soluțiile $x = -k(a+b)a^2$, $y = kb(a+b)^2$, $z = kab^2$ cu $k, a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $a + b \neq 0$. În cel de-al doilea caz avem soluțiile $x = c$, $y = c$, $z = c$ unde $c \in \mathbb{Z}^*$.

126. Fie $(x, y, z) = d$. Rezultă $x = da$, $y = db$, $z = dc$ și $a^2 + b^2 = c^2$ cu $(a, b, c) = 1$. Rezultă $(a, b) = 1$, $(a, c) = 1$, $(b, c) = 1$. Se arată ușor că c este impar. Putem presupune a par și b impar. Avem $b^2 = (c-a)(c+a)$ și $(c-a, c+a) = 1$ și deci $c + a = \alpha^2$, $c - a = \beta^2$ adică $b = \alpha\beta$, $c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$, $a = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$ cu α și β impare. Notăm $\alpha - \beta = 2n$, $\alpha + \beta = 2m$ și avem $\alpha = m + n$, $\beta = m - n$ rezultă de aici $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$. Așadar soluțiile sunt $a = 2mnd$, $b = (m^2 - n^2)d$, $c = (m^2 + n^2)d$ unde m, n, d sunt naturale și $m \geq n$.

127. Avem soluțiile $(\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1)$ și deci $x^2 = 1$. În celelalte cazuri x, y, z sunt nenule. Arătăm că ecuația $u^4 - v^4 = z^2$, $(u, v) = 1$ (1) nu are soluție numere întregi nenule cu $(u, v) = 1$. Presupunem prin absurd că există soluții $(a, b, c) = 1$ cu $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Alegem a minim și avem $(a^2)^2 = (b^2)^2 + c^2$ adică o ecuație a lui Pitagora. Dacă b este impar atunci $a^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $b^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $c = 2\alpha\beta$ unde $\alpha > \beta > 0$, $\alpha + \beta$ impar, $(\alpha, \beta) = 1$ rezultă $\alpha^4 = \beta^4 + (u_0 v_0)^2$ adică o soluție pentru (1) cu $0 < \alpha < a$, ceea ce contrazice minimalitatea lui a. Dacă b este par atunci avem $a^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $b^2 = 2\alpha\beta$, $c = \alpha^2 - \beta^2$. Putem presupune că α este par și β impar. Din relația $b^2 = 2\alpha\beta$ rezultă $2\alpha = p^2$, $\beta = q^2$ adică $\alpha = 2p_1^2$, $\beta = q^2$ cu q impar, $p_1 > 0$, $q > 0$, $(p_1, q) = 1$ și $a^2 = (2p_1^2)^2 + (q^2)^2$, $b = 2p_1 q$. Avem din nou o ecuație a lui Pitagora și deci $a = r^2 + s^2$, $p_1^2 = rs$, $q^2 = r^2 - s^2$ cu $r > s > 0$, $(r, s) = 1$. Din $p_1^2 = rs$ rezultă $r = m^2$, $s = n^2$ și deci $m^4 - n^4 = q^2$ și $(m, n) = 1$, $m > 0$, $n > 0$ adică ecuația (1) cu $m = \sqrt{r} = \sqrt{a - s^2} < a$ și din nou este contrazisă minimalitatea lui a.

128. Rezultă că x și y sunt impare. Relația se scrie $z^4 - (xy)^4 = \left(\frac{x^4 - y^4}{2}\right)^2$ cu $(z, xy) = 1$. Din problema precedentă rezultă $z^2 = 1$ și deci $x^4 + y^4 = 2$ adică $x^2 = 1$ și $y^2 = 1$ și deci $x = \pm 1$ și $y = \pm 1$.

129. Presupunem că ecuația $a^4+b^4=c^2$ (1) are soluții în numere naturale nenule. Fie (x,y,z) o soluție cu z minim. Rezultă $(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$ cu $(x^2,y^2)=1$ și deci $z=\alpha^2+\beta^2$, $x^2=2\alpha\beta$, $y^2=\alpha^2-\beta^2$, $(\alpha,\beta)=1$. Din $\alpha^2=y^2+\beta^2$ rezultă α impar și deci $(\alpha,2\beta)=1$. Cum $x^2=2\alpha\beta$ rezultă $\alpha=m^2$, $2\beta=n^2$ și deci $\beta=2p^2$. Avem $\alpha^2=y^2+\beta^2$. Cum $(y,\beta)=1$ avem $\alpha=u^2+v^2$, $y=u^2-v^2$ și $\beta=2uv$ adică $uv=p^2$ cu $(u,v)=1$. Rezultă $u=k^2$, $v=h^2$, $p=kh$ și $m^2=k^4+h^4$ deci $(k,\ h,\ m)$ este soluție pentru (1). Dar $m=\sqrt{\alpha}<\alpha^2+\beta^2<z$, ceea ce contrazice minimalitatea lui z.

130. Avem $b^2+c^2=a^2$. Numerele $a,\ b,\ c$ sunt pare sau unul dintre ele este par. Rezultă că $\frac{a+b-c}{2}$ și $\frac{a-b+c}{2}$ sunt numere naturale. Avem $b^2+c^2-bc=$
$=\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2=x^2+y^2$. Cum $b+c=u^2+v^2$ rezultă că $b^3+c^3=$
$=(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu+yv)^2+(xv-yu)^2$.

131. Căutăm soluții de forma $x+y=1$ care asigură și condiția $(x,y)=1$. Înlocuind $y=1-x$ avem $3x^2-3x+1-z^2=0$ și deci $x=\frac{3\pm\sqrt{12z^2-3}}{6}$. Avem $12z^2-3=t^2$ și deci $3\mid t^2$ adică $t=3s$ și ecuația devine $(2z)^2-3s^2=1$. Utilizând problema 107 considerăm $2z=a_n$, $s=b_n$ și rezultă $x=\frac{1\pm b_n}{2}$. Trebuie ales n astfel încât a_n să fie par și b_n impar. Este ușor de arătat că aceasta se întâmplă pentru n impar. Avem soluțiile $x=\frac{1\pm b_n}{2}$, $y=\frac{1\mp b_n}{2}$, $z=\frac{a_n}{2}$, n impar.

132. Presupunem că $x+y=p$, p prim și $x^n+y^n=z^n$. Rezultă $p(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^1+\ldots+y^{n-1})=z^n$ și deci $p\mid z$ și $z=p\cdot k$ cu $k\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că $z\geq p$ și deci $x^n+y^n=z^n\geq p^n=(x+y)^n$ adică $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n+\left(\frac{y}{x+y}\right)^n\geq 1$. Dar $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n+\left(\frac{y}{x+y}\right)^n<\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$, contradicție.

133. Putem presupune $a\leq b$ și $c\leq d$. Dacă $a=0$ rezultă $c=0$ și $b+d=3$ și avem soluțiile (0, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 1), (0, 3, 0, 0). Dacă $c=0$ se obțin aceleași rezultate. Rămân cazurile $a,c\geq 1$. Dacă $a=1$ atunci $b=cd$ și $cd+c+d-2=cd$ și deci $c+d=2$, $1\leq c\leq d$ rezultă $c=1$, $d=1$ apoi $b=1$ și soluția (1, 1, 1, 1). Același rezultat se obține dacă $c=1$. Rămân cazurile $a,\ c\geq 2$. Avem relația $ab+cd=2(a+b+c+d-3)$ adică

$$(a-2)(b-2)+(c-2)(d-2)=2. \qquad (1)$$

Dacă $a=2$ atunci $(c-2)(d-2)=2$ cu $c\le d$. Avem $c-2=1$ și $d-2=2$ și deci $c=3$, $d=4$ și $b=\frac{cd}{a}=6$. Considerând cazul $c=2$ găsim soluțiile (2, 6, 3, 4), (3, 4, 2, 6), (6, 2, 3, 4,), (6, 2, 4, 3), (3, 4, 6, 2), (2, 6, 4, 3), (6, 2, 4, 3), (4, 3, 2, 6). Pentru $b\ge a\ge 3$, $d\ge c\ge 3$ se obține soluția (3, 3, 3, 3).

D. Șerbănescu

134. Considerăm $x\ge y\ge z\ge t$ și avem $\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{z}\le\frac{1}{t}$ și deci $1\le\frac{4}{t}$ adică $t\le 4$. Evident $t\ge 2$.

Pentru $t=4$ se obține egalitate în toate cazurile deci $x=y=z=t=4$.

Pentru $t=3$ avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ și deci $\frac{2}{3}\le\frac{3}{z}$ și deci $z\le 4{,}5$ adică $z\in\{3,4\}$.

Dacă $z=3$ obținem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ și deci $\frac{1}{3}\le\frac{2}{3}$ adică $y\le 6$. Convin situațiile $y=6$, $x=6$ și $y=4$, $x=12$.

Dacă $z=4$ avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\le\frac{2}{y}$ și deci $y\le\frac{24}{7}$, contradicție deoarece $y\ge z\ge 4$.

Pentru $t=2$ avem $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{z}$ și deci $z\le 6$.

Pentru $z=6$ avem $x=y=6$.

Pentru $z=5$ avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$ și deci $\frac{3}{10}\le\frac{2}{y}$ adică $y\le 6$ și $y\ge z\ge 5$. Convine $y=5$, $x=10$.

Avem soluțiile (4, 4, 4, 4), (6, 6, 3, 3), (12, 4, 3, 3), (6, 6, 6, 2), (10, 5, 5, 2) și permutările circulare.

135. Avem $a+b+c<3d$ și $d\mid a+b+c$. Analizăm cazurile

1. $a+b+c=d$.

2. $a+b+c=2d$.

1. Avem de asemenea $a\mid b+c+d=2d-a$ și deci $a\mid 2d$.

Analog $b\mid 2d$, $c\mid 2d$ și deci $2d=ax=by=cz$, $x,y,z\in\mathbb{N}^*$. Rezultă $x>y>z>2$ deoarece $a<b<c<d$. Cum $a=\frac{2d}{x}$ etc. se obține $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$.

Dacă $z \geq 6$ rezultă $x > 6$, $y > 6$ și contradicția $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{31}{6} = \frac{1}{2}$. Deci avem cazurile:

a) $z = 5$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{5}$ adică $(3x-5)(3y-5) = 25$. Cum $x > y > 2$ avem $3x-5 = 25$ și $3y-5 = 1$ adică $x = 10, y = 2$, contradicție.

b) $z = 4$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 16$ cu $x > y > 2$. Avem $y-4 = 1$, $x-4 = 16$ sau $y-4 = 2$, $x-4 = 8$ și deci $(x,y,z) = \{(20,5,4),(12,6,4)\}$.

Din $x = 20$, $y = 5$, $z = 4$ rezultă $\frac{2d}{a} = 20$, $\frac{2d}{b} = 5$, $\frac{2d}{c} = 4$ și deci $d = 10a$, $b = \frac{2d}{5} = 4a$, $c = 5a$ și avem soluția $(a,b,c,d) = (a,4a,5a,10a), a \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $(x,y,z) = (12,6,4)$ găsim soluția $(a,2a,3a,6a)$.

c) $z = 3$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ și obținem soluțiile

$(a,b,c,d) = \{(a,6a,14a,21a),(a,3a,8a,12a),(a,2a,6a,9a),(2a,3a,10a,15a)\}$.

2. Pentru $a+b+c = 2d$ rezultă ca mai sus $a,b,c \mid 3d$ adică $3d = ax = by = cz$ cu $x > y > z > 3$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Deci $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ și avem contradicția $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{37}{60}$.

D. Șerbănescu

136. Pentru $n = 0$ avem $(a,b,c,d) = (2,1,1,1)$ și permutările sale. Pentru $n \geq 1$ numărul $a^2+b^2+c^2+d^2$ este par și rezultă imediat că numerele a, b, c, d au aceeași paritate. Avem cazurile:

a) Numerele a,b,c,d sunt impare: $a = 2\alpha+1, b = 2\beta+1, c = 2\gamma+1$, $d = 2\delta+1$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{N}$. Ecuația se scrie $\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)+\gamma(\gamma+1)+\delta(\delta+1) = 7\cdot 4^{n-1}-1$. Cum primul membru este par rezultă $n = 1$. Ecuația $a^2+b^2+c^2+d^2 = 28$ are soluțiile (3, 3, 3, 1), (1, 1, 1, 5) și permutările lor.

b) Numerele a,b,c,d sunt pare: $a = 2\alpha, b = 2\beta, c = 2\nu, d = 2\delta$. Obținem $\alpha^2+\beta^2+\nu^2+\delta^2 = 7\cdot 4^{n-1}$ și procedăm în continuare ca mai sus. Avem soluțiile $(2^{n+1},2^n,2^n,2^n),(3\cdot 2^n,3\cdot 2^n,3\cdot 2^n,2^n)$ și $(2^n,2^n,2^n,5\cdot 2^n)$ și permutările lor.

L. Panaitopol

137. Avem $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8a^3b+8ab^3$. Alegem $a = 8$ și $b = c^6$ și obținem $(c^6+8)^4-(c^6-8)^4 = 2^{12}\cdot c^6+2^6\cdot c^{18}$. Pentru c impar, $c \geq 2$ notăm $x = 4c, y = 2c^3$, $t = c^6+8, z = c^6-8$ și avem $(x,y,z,t) = 1$ și $x^6+y^6 = t^4-z^4$.

138. Putem presupune $x \le y \le z$. Dacă $x = 1$ atunci

$$yz \mid (y+1)(y+z)(z+1). \qquad (1)$$

Rezultă $y \mid z(z+1)$ și $z \mid y(y+1)$. Cum $(y,z)=1$ rezultă $y \mid z+1$ și $z \mid y+1$. Deoarece $y \le z$ rezultă $z = 1$ sau $z = y + 1$. Dacă $z = 1$ rezultă $x = y = 1$ și $t = 8$. Dacă $z = y + 1$ rezultă $y \mid y + 2$ adică $y \mid 2$. Dacă $y = 1$ avem $z = 2$ și $t = 9$. Dacă $y = 2$ rezultă $z = 3$ și $t = 10$. Fie acum $x \ge 2$. Deoarece $x \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ și $(x, x+y)=1$, $(x, x+z)=1$ rezultă $x \mid y+z$ și deci $x \mid x+y+z$. Analog rezultă $y \mid x+y+z$ și $z \mid x+y+z$. Cum x, y, z sunt prime două câte două rezultă $xyz \mid x+y+z$ și deci $x+y+z \ge xyz$ adică $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz} \ge 1$. Cum $x \ge 2$ rezultă $y \ge 2, z \ge 2$ și deci $xy \ge 4, yz \ge 4, zx \ge 4$ și se obține contradicția $1 \le \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} \le \frac{3}{4}$. Așadar soluțiile sunt (1, 1, 1, 8), (1, 1, 2, 9), (1, 2, 3, 10) și permutările circulare pentru x, y, z.

M. Becheanu

139. Observăm că (2, 2, 2, 2) și (6, 2, 2, 2) sunt soluții. Aceasta ne sugerează să căutăm soluții de forma $x = 2u, y = 2v, y = t = 2$. Avem $u^2 + v^2 + 2 = 4uv$ și deci $(u - v)^2 = 2(1 + uv)$ adică $u - v$ este par. Notăm $u - v = 2b$, $u + v = 2a$ și avem $u = a + b, v = a - b$. Ecuația devine $a^2 - 3b^2 = 1$. Din $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$ rezultă $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ și deci ecuația din enunț admite soluțiile $x = 2(a_n + b_n)$, $y = 2(a_n - b_n)$, $y = t = 2$ unde $n \in \mathbb{N}^*$.

140. Relația se scrie

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 + d^6 + e^6 + f^6 - 3d^2e^2f^2 + 3(abc - def)^2 = 1. \qquad (1)$$

Rezultă $abc - def = 0$ și relația devine $(a^2 + b^2 + c^2)((a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)^2) + (d^2 + e^2 + f^2)((d^2 - e^2)^2 + (e^2 - f^2)^2 + (f^2 - a^2)^2) = 2$. Dacă nici un număr nu este 0 atunci $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$ și $d^2 + e^2 + f^2 \ge 3$ și deci $a^2 = b^2 = c^2$ și $d^2 = e^2 = f^2$ și relația nu se verifică. Dacă $a = 0$ relația inițială devine $b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 = 1$ și deci încă patru dintre numerele b, c, d, e, t sunt 0.

141. Considerăm $a_1 = 2$, $a_i = 3^{i-1}$, $i \in \overline{2, n-1}$, $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$ și avem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^{n-2}}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} = 1.$$

142. Dacă $x = 2k$ atunci $x^4 = 16k^4 = \mathfrak{M}16$. Dacă $x = 2k+1$ atunci $x^2 = 4k(k+1)+1 = \mathfrak{M}8+1$ și $x^4 = (\mathfrak{M}8+1)^2 = \mathfrak{M}16+1$. Așadar $x_i^4 = \mathfrak{M}16+r$ cu $r \in \overline{0,1}$. Avem $1998 = 16 \cdot 124 + 14$ și deci $n \geq 14$. Dacă $n = 14$ atunci $x_i = 2k_i + 1$ și deci $x_i^4 = 16a_i + 1$. Relația din enunț devine $\sum_{i=1}^{14} a_i = 124$. Numerele a_i se obțin din $\frac{(2k+1)^4 - 1}{16}$ care pentru $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dau 0, 5, 39, 150... În cazul nostru $a_i \leq 124$ și deci $a_i \in \{0,5,39\}$. Cum $\sum_{i=1}^{14} a_i = 124$ rezultă că 39 apare de k ori unde $k \in \overline{1,3}$. Cum $124 - k39 \neq \mathfrak{M}5$ rezultă că $n \neq 14$, adică $n \geq 15$. Pentru $n = 15$ se stabilește egalitatea

$$5^4 + 5^4 + \underbrace{3^4 + \ldots + 3^4}_{9 \text{ ori}} + 2^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 = 1998.$$

Gh. Iurea

143. Căutăm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere întregi pentru care

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Dacă $n = 1$ alegem $x_1 = 1$.

Dacă $n = 2$ alegem $x_1 = x_2 = 2$.

Pentru $n \geq 3$ considerăm $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$; $x_{n-1} = 2$; $x_n = n$ și avem

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-2} + 2 + n = 2n \text{ și } x_1 x_2 \ldots x_n = 2n.$$

144. Relația se scrie $(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 + \ldots + (2x_n - 1)^2 = n$. Cum numerele $(2x_i - 1)^2$ sunt impare rezultă $(2x_i - 1)^2 = 1, \forall\, i \in \overline{1,n}$ și deci $x_i = 1$ sau $x_i = 0$. Așadar pe fiecare poziție a sistemului se poate plasa 1 sau 0. Există deci 2^n sisteme.

145. Alegem $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1999} = 1, x_{2000} = 3$ și notăm $x_{2001} = x$, $x_{2002} = y$, $x_{2003} = z$. Avem $1999 + 27 + x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ adică

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) = -2026.$$

Luăm $y = x, z = x - 1$ și avem $3x - 1 = -2026$ deci $x = -\frac{2025}{3} = -675$.

Soluția este $\left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{1999}, 3, -675, -675, -676\right)$.

146. Un număr cu o infinitate de zecimale este rațional dacă și numai dacă este o fracție periodică. Presupunem că numărul n are o perioadă de lungime k. Deoarece există în scrierea numărului o secvență de $2k$ cifre 2 rezultă că perioada este formată numai din din cifre 2 ceea ce este fals. Deci n este irațional.

147. Fie $n = 0,11...1$. Avem $9n = 0,99...9 = 1 - \frac{1}{10^{2001}}$ și deci $1 > \sqrt{9n} = \sqrt{1 - \frac{1}{10^{2001}}} > 1 - \frac{1}{10^{2001}}$ adică $\frac{1}{3} > \sqrt{n} > \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^{2001}} = 0,\underbrace{33...3}_{2001 \text{ cifre}}$. Așadar primele 2001 zecimale sunt 3.

D. Popovici

148. Suma cifrelor este $35 = 3k + 2$. Pătratele perfecte sunt de forma $3k$ sau $3k+1$ și au suma cifrelor de aceste forme. Așadar n nu este pătrat perfect și deci $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

149. Presupunem $r_i = \frac{p_i}{q_i}, p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \forall\, i \in \overline{1,n}$. Fie p număr prim care nu divide $q_1 q_2 ... q_n$. Dacă $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \cdot x_i}{q_i}$, după eliminarea numitorilor avem $q_1 q_2 ... q_n = px$ cu $x \in \mathbb{Z}$. Rezultă contradicția $p \mid q_1 q_2 ... q_n$.

150. Avem $a_{n+1}^3 = 1 + a_n^3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Adunând relațiile $a_2^3 = 1 + a_1^3$, $a_3^3 = 1 + a_2^3, ..., a_n^3 = 1 + a_{n-1}^3$ avem $a_n^3 = a_1^3 + n - 1$. Așadar în șirul $(a_n^3)_{n \geq 1}$ se găsesc toate numerele naturale începând cu a_1. Dintre acestea o infinitate sunt cuburi perfecte (deci $a_n \in \mathbb{Q}$) și o infinitate nu sunt cuburi perfecte ($a_n \notin \mathbb{Q}$).

151. Avem $a = 2p^2 + q + 2p\sqrt{p^2+q}$. Deoarece $p^2 < p^2 + q < (p+1)^2$ rezultă că $p^2 + q$ nu este pătrat perfect și deci $\sqrt{p^2+q} \notin \mathbb{Q}$ și deci $a \notin \mathbb{Q}$. Notăm $b = \left(p - \sqrt{p^2+q}\right)^2$ și avem $a + b \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte $0 < \sqrt{p^2+q} - p < \frac{1}{2}$ și deci $b < \frac{1}{4}$. Cum $[a] + \{a\} + b \in \mathbb{N}$ rezultă $\{a\} = 1 - b > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

A. Ghioca

152. Presupunem că ecuația are soluția $\frac{X}{U}, \frac{Y}{U}, \frac{Z}{U}$ cu $X, Y, Z, U \in \mathbb{Z}$. Avem relația $X^2 + Y^2 + Z^2 + UX + UY + UZ = U^2$, adică $(2X+U)^2 + (2Y+U)^2 + (2Z+U)^2 = 7U^2$. Fie $U = 2^\alpha a$ cu $(a, 2) = 1$. Rezultă că $7U^2 = 7 \cdot 2^{2\alpha}(\mathfrak{M}8 + 1) = 4^\alpha(\mathfrak{M}8 + 7)$. Însă numerele de forma $4^\alpha(\mathfrak{M}8 + 7)$ nu pot fi reprezentate ca sumă de trei pătrate.

153. Punem $x=a/c$, $y=b/c$ cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $c\neq 0$ și avem $a^2+ab+b^2=c^2$ adică $(2a+b)^2+3b^2=4c^2\Leftrightarrow 3b^2=(2c-2a-b)(2c+2a+b)$. Alegem $b=4d$, $2c-2a-b=4$ și $2c+2a+b=12d^2$. Rezultă $a=3d^2-2d-1$ și $c=3d^2+1$ cu $d\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$.

154. Presupunem că există a, b, c, d naturale $(a, b) = 1$, $(c, d) = 1$ astfel ca $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$ și $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=n$ adică $cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)=nabcd$. (1)

Rezultă $a\mid b^2cd$ și $b\mid a^2cd$. Cum $(a, b) = 1$ avem $a\mid cd$ și $b\mid cd$, adică $[a, b]\mid cd$ și deci $ab\mid cd$. Analog se arată că $cd\mid ab$. Așadar $ab = cd$ și relația (1) devine $a^2+b^2+c^2+d^2=nab$. Rezultă $(a+b)^2+(c-d)^2=nab$ și $(a-b)^2+(c+d)^2=nab$. Deoarece $3\mid n$ rezultă $3\mid(a+b)^2+(c-d)^2$ și $3\mid(a-b)^2+(c+d)^2$. Se știe că dacă $U,V\in\mathbb{Z}$ și $3\mid U^2+V^2$ atunci $3\mid U$ și $3\mid V$. În cazul nostru rezultă $3\mid a+b$ și apoi $3\mid a-b$ adică $3\mid a$ și $3\mid b$. Aceasta contrazice condiția $(a, b) = 1$ și justifică enunțul.

155. Din relația $(a^2-1)^2+(2a)^2=(a^2+1)^2$ rezultă $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1$.

Fie a, b sunt numere naturale cu $a\neq b$, $a,b\geq 4$. Avem

$$2=\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)^2+\left(\frac{2b}{b^2+1}\right)^2.$$

Dacă $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{b^2-1}{b^2+1}$ rezultă contradicțiile $a=b$ sau $ab=1$. Dacă $\frac{2a}{a^2+1}=\frac{b^2-1}{b^2+1}$ rezultă $\frac{2a}{a^2+1}=\frac{b^2-1}{b^2+1}$ adică $b^2=\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$ și deci contradicția $b=\frac{a+1}{a-1}<3$.

156. Fie $\sqrt[k]{n}=\frac{a}{b},(a,b)=1$. Rezultă $nb^k=a^k$ și deci $b^k\mid a^k$. Cum $(a^k,b^k)=1$ rezultă $b = 1$ și deci $n = a^k$.

Aplicație. Orice număr întreg p se scrie sub forma $p=5q+\alpha$, cu $q,\alpha\in\mathbb{Z},\alpha\in\{0,\pm1,\pm2\}$ și deci $p^2=(5q+\alpha)^2=5r+\alpha^2$, unde $\alpha^2\in\{0,1,4\}$. Rezultă că numerele naturale de forma $5h+2$, sau $5h+3$ nu sunt pătrate perfecte și deci $\sqrt{5h+2},\sqrt{5h+3}$ sunt iraționale. Pentru $m\geq 5$ rezultă $m!=5h$ și deci $\sqrt{m!+2}\notin\mathbb{Q}$. Pentru $m\leq 4$ se constată că $\sqrt{m!+2}\in\mathbb{Q}$ numai dacă $m = 2$.

157. Fie $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}=\frac{a}{b},a,b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1$. Rezultă $n=\frac{5a^2+2b^2}{4b^2-a^2}=$

$=\frac{22b^2}{4b^2-a^2}-5\in\mathbb{Z}$. Avem $(b^2,4b^2-a^2)=(b^2,-a^2)=1$ și deci $\frac{22b^2}{4b^2-a^2}\in\mathbb{Z}$ dacă și

numai dacă $4b^2-a^2 \mid 22$ adică $4b^2-a^2=1$, $4b^2-a^2=2$, $4b^2-a^2=11$ sau $4b^2-a^2=22$. Avem $4b^2-a^2=1 \Leftrightarrow (2b-a)(2b+a)=1 \Leftrightarrow 2b-a=1$ și $2b+a=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$ și $a=0$, contradicție. Avem $4b^2-a^2=2 \Rightarrow a=2c \Rightarrow 4(b^2-c^2)=2$, contradicție. Avem $4b^2-a^2=11 \Leftrightarrow (2b-a)(2b+a)=11 \Leftrightarrow 2b-a=1$ și $2b+a=11$ și deci $b=3$ și $a=5$. Rezultă $n=13$. Avem $4b^2-a^2=22 \Rightarrow a=2c \Rightarrow 4(b^2-c^2)=22$, contradicție. Răspunsul este deci $m=13$.

D. Popescu

158. Fie $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}=r, r\in\mathbb{Q}$. Din $\sqrt[3]{b}=r-\sqrt{a}$ rezultă $b=r^3-3r^2\sqrt{a}+3ra-$ $-a\sqrt{a}$ și deci $\sqrt{a}(3r^2+a)=r^3+3ar-b$. Fie $a=-3r^2$. Cum $a\geq 0$ rezultă $a=0$ și $b=r^3$ ceea ce confirmă enunțul. Dacă $a\neq -3r^2$ atunci $\sqrt{a}=\frac{r^3+3ar-b}{3r^2+a}=x$ cu $x\in\mathbb{Q}$, deci $a=x^2$. Rezultă $\sqrt[3]{b}=r-x=y\in\mathbb{Q}$ și $b=y^3$. Presupunem $\sqrt{n+2}+\sqrt[3]{3n}$ rațional și rezultă $n+2=x^2$ și $3n=y^3$, cu $x,y\in\mathbb{Z}$. Cum $3\mid y$ rezultă $y=3z$ și $n=9z^3$. Avem $x^2=9z^3+2$ însă $x^2\neq \mathfrak{M}3+2$.

159. Se arată ușor că dacă $a\in\mathbb{Z}$ și $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ atunci $a=b^2, b\in\mathbb{N}$.

Presupunem că $\sqrt{3-x^2}=\frac{n}{m}$ și $\sqrt[3]{3-x^3}=\frac{q}{p}$, $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$, $(m,n)=1$, $(p,q)=1$. Rezultă $x=\frac{\sqrt{3m^2-n^2}}{m}$ și $x=\frac{\sqrt[3]{3p^3-q^3}}{p}$ și deci $\frac{\sqrt{3m^2-n^2}}{\sqrt[3]{3p^3-q^3}}=\frac{m}{p}\in\mathbb{Q}$. Ridicăm la cub și avem $\sqrt{3m^2-n^2}\in\mathbb{Q}$. Cum $3m^2-n^2\in\mathbb{Z}$, avem $3m^2-n^2=k^2$ (1) cu $k\in\mathbb{N}$. Rezultă $3\mid n^2+k^2$ și apoi $3\mid n$ și $3\mid k$ adică $n=3n_1$ și $k=3k_1$. Din (1) rezultă $m^2=3(n_1^2+k_1^2)$ și deci $3\mid m$. S-a obținut contradicția $3\mid (m,n)=1$.

L. Panaitopol

160. Fie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=r$ cu $r\in\mathbb{Q}$. Dacă $r=0$ atunci $a=b=c=0$ și condiția este îndeplinită. Dacă $r>0$ avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}=r-\sqrt{c}$ și deci $a+b+2\sqrt{ab}=$ $=r^2-2r\sqrt{c}+c$. Așadar $\sqrt{ab}+r\sqrt{c}=s$ (1) cu $s\in\mathbb{Q}$. Avem $2r\sqrt{abc}=s^2-ab-r^2c\in\mathbb{Q}$ și deci $\sqrt{abc}=t\in\mathbb{Q}$. Dacă de exemplu $c=0$ atunci $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}$. Dacă $a=b$ atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Dacă $a\neq b$ atunci $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$ și cum $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ rezultă $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Dacă a, b, $c>0$ atunci $\sqrt{ab}=\frac{t}{\sqrt{c}}$ și din (1) avem $\frac{t}{\sqrt{c}}+r\sqrt{c}=s$ cu $t>0$, $r>0$ și deci $s>0$. Rezultă $\sqrt{c}=\frac{rc+t}{s}\in\mathbb{Q}$. Analog se arată că $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

161. Dacă unul dintre numerele a, b, c sau d este nul atunci problema se reduce la cea precedentă. Fie $a, b, c, d > 0$. Avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=r$ cu $r\in\mathbb{Q}$ și $r > 0$. Ridicând la pătrat obținem $\sqrt{d}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=s$ unde $s\in\mathbb{Q}$ și $s > 0$. Cum $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=r-\sqrt{d}$ obținem $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ac}=s+d-r\sqrt{d}$. Ridicăm la pătrat și avem $\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=k-2r(s+d)\sqrt{d}$ unde $k\in\mathbb{Q}$ și $k > 0$. Rezultă

$$\sqrt{abc}\left(r-\sqrt{d}\right)=k-2r(s+d)\sqrt{d} \qquad (1)$$

și deci $\sqrt{abc}=\dfrac{k-2r(s+d)\sqrt{d}}{r-\sqrt{d}}=m+n\sqrt{d}$ cu $m,n\in\mathbb{Q}$ adică

$$\sqrt{abcd}=m\sqrt{d}+nd. \qquad (2)$$

Dacă $m = 0$ rezultă $\sqrt{abc}=n\sqrt{d}$ și din (1) avem: $rn\sqrt{d}-nd=k-2r(s+d)\sqrt{d}$ adică $rn=-2r(s+d)$ adică $n=-2(s+d)<0$ și deci $\sqrt{abc}=n\sqrt{d}<0$, contradicție. Așadar $m\neq 0$. Dacă $\sqrt{d}\in\mathbb{Q}$, problema se reduce la cea precedentă. Dacă $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, din (2) rezultă $\sqrt{abcd}=m\sqrt{d}$ adică $abc=m^2$. Analog rezultă $bcd=s^2$, $cda=t^2$, $dab=u^2$, unde $s,t,u\in\mathbb{Q}^*$. Atunci $ad=\left(\dfrac{ms}{bc}\right)^2$ și $c=\left(\dfrac{tbc}{ms}\right)^2$ adică $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$ și din nou suntem în cazul problemei 160.

162. Dacă $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\in\mathbb{Q}$ din problema 161 rezultă că $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, \sqrt{a-b}$ sunt raționale. Așadar $a=x^2$, $b=y^2$, $a+b=u^2$, $a-b=v^2$ cu $x,y,u,v\in\mathbb{Q}$, $u > v > 0$. Rezultă $x^2+y^2=u^2$ și $x^2-y^2=v^2$. Fie $X,Y,Z,U,V\in\mathbb{N}$ astfel ca $x=\dfrac{X}{Z}$, $y=\dfrac{Y}{Z}$, $u=\dfrac{U}{Z}$, $v=\dfrac{V}{Z}$. Avem $X^2+Y^2=U^2$ și $X^2-Y^2=V^2$. Dacă $(X,Y)=d$ atunci $d\mid U$, $d\mid V$ și $X=dm$, $Y=dn$, $(m,n)=1$, $U=dp$, $V=dq$. Avem

$$m^2+n^2=p^2, \qquad (1)$$

$$m^2-n^2=q^2, (m,n)=1. \qquad (2)$$

Din (1) rezultă că m și n au parități diferite și deci $m + n$, $m - n$ sunt impare. Rezultă $(m-n,m+n)=1$ și din (2) avem $m+n=k^2$, $m-n=h^2$ cu k, h impare $(k, h) = 1$ și deci $m=\dfrac{k^2+h^2}{2}$, $n=\dfrac{k^2-h^2}{2}$. Din (1) rezultă $k^4+h^4=2p^2$ cu $(k, h)= 1$. Din problema 128 rezultă că $k^2=h^2=1$, deci $n=0$. Atunci $Y=0, y=0$ și $b=0$, contradicție.

163. Avem $n\sqrt{7} > m$ și deci $7n^2-m^2>0$. Arătăm că nu avem nici una dintre egalitățile

$$7n^2-m^2=1, 7n^2-m^2=2. \qquad (1)$$

Deoarece $m=7k+r$ unde $r\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$, rezultă $m^2=7h+r^2$ unde $r\in\{0,1,4\}$. Așadar $m^2 + 1$ și $m^2 + 2$ nu se divide la 7 adică relațiile (1) nu se verifică.

Rezultă $7n^2 - m^2 \geq 3$ și deci $\sqrt{7} \geq \frac{\sqrt{m^2+3}}{n}$. Rămâne de arătat că $\frac{\sqrt{m^2+3}}{n} \geq \frac{m^2+1}{mn}$ și deci $m\sqrt{m^2+3} \geq m^2+1$ ceea ce revine la $3m^2 \geq 2m^2+1$.

R. Gologan

164. Fie $q = \frac{m}{n}$. Pentru $n = 1$ avem $|\sqrt{2}-q| = |\sqrt{2}-m| \geq \sqrt{2}-1 > \frac{1}{3}$. Pentru $n = 2$ avem $\left|\sqrt{2} - \frac{m}{2}\right| \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$ Pentru $n \geq 3$ presupunem $|\sqrt{2}-q| \leq \frac{1}{3n^2}$. Rezultă $|\sqrt{2}-q| \leq \frac{1}{27}$ adică $\sqrt{2} - \frac{1}{27} \leq q \leq \sqrt{2} + \frac{1}{27}$. Pe de altă parte avem $-\frac{1}{3n^2} \leq \sqrt{2} - q \leq \frac{1}{3n^2}$ adică $-\frac{1}{3n^2} \leq \sqrt{2} - \frac{m}{n} \leq \frac{1}{3n^2}$ și deci $m - \frac{1}{3n} \leq n\sqrt{2} < m + \frac{1}{3n}$. Ridicăm la pătrat și obținem $-\frac{2}{3}q + \frac{1}{9n^2} < 2n^2 - m^2 < \frac{2}{3}q + \frac{1}{9n^2}$. Avem $\frac{2}{3}q + \frac{1}{9n^2} < \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{27}\right) + \frac{1}{81} <$ $< \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{27} < 1$ și $-\frac{2}{3}q + \frac{1}{9n^2} > -\frac{2}{3}q > -\frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{27}\right) > -1$.

Așadar avem $-1 < 2n^2 - m^2 < 1$ adică $2n^2 - m^2 = 0$ și deci contradicția $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

165. Presupunem prin absurd că pentru $n \geq n_0$, $a_n \in \mathbb{Q}_+$ adică $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, $(p_n, q_n) = 1$. Rezultă că pentru $n \geq n_0$ avem $\frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2} = 1 + \frac{p_n}{q_n} \Leftrightarrow q_n p_{n+1}^2 = (q_n + p_n) q_{n+1}^2$. Cum $(p_{n+1}^2, q_{n+1}^2) = 1$ rezultă $q_{n+1}^2 \mid q_n$ și deci $q_n \geq q_{n+1}$, $\forall\, n \geq n_0$. Există n_1 astfel că pentru $n \geq n_1 \geq n_0$ avem $q_n = q_{n+1}$. Relația (1) devine $p_{n+1}^2 = q_n(q_n + p_n)$ cu $(p_{n+1}, q_n) = 1$. Cum $q_n \mid p_{n+1}^2$ rezultă $q_n = 1$ și deci pentru $n \geq n_1$, $a_n \in \mathbb{N}$. Avem $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$ și $a_{n+2}^2 = 1 + a_{n+1}$. Rezultă $(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1} - a_n$, $\forall\, n \geq n_1$. (1) Dacă $a_{n+1} = a_n$ se obține contradicția $a_n \in \mathbb{N}$ și $a_n^2 - a_n - 1 = 0$. Din (1) avem contradicția $|a_{n+1} - a_n| > |a_{n+2} - a_{n+1}| > |a_{n+1} - a_{n+2}| > \ldots > 0$.

166. Evident condiția este îndeplinită dacă $x \in \mathbb{Q}$. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ notăm $a = \frac{2x^2+1}{x-3}$ și $b = \frac{3x^2-1}{3x-5}$. Rezultă $a, b \in \mathbb{Q}$, $2x^2 = ax - 3a - 1$ și

$$3x^2 = 3bx - 5b + 1 \qquad (1)$$

adică $\frac{ax - 3a - 1}{3bx - 5b + 1} = \frac{2}{3}$ și deci $3x(a - 2b) = 9a - 10b + 5$. Deoarece $x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rezultă $a - 2b = 0$ și $9a - 10b + 5 = 0$ adică $a = -\frac{5}{4}$ și $b = -\frac{5}{8}$. Relațiile (1) devin $8x^2 + 5x - 11 = 0$ și deci $x = \frac{-5 \pm \sqrt{374}}{16}$. Pentru aceste valori și pentru numerele raționale diferite de 3 și 5/3 avem $a, b \in \mathbb{Q}$.

L. Panaitopol

167. Fie $xy=a\,(1)$, $x^2+y=b\,(2)$, $y^2+x=c\,(3)$. Înmulțind (2) cu y și (3) cu x obținem $(1-a)x+by=c\,(4)$, $cx+(1-a)y=b\,(5)$. Dacă $(1-a)^2\neq bc$, rezultă contradicția $x=\dfrac{c(1-a)-b^2}{(1-a)^2-bc}\in\mathbb{Q}$. Înmulțind relațiile $x^2=b-y$, $y^2=c-x$ rezultă $bx+cy=a-a^2\,(6)$. Dacă $c(1-a)\neq b^2$ din (4) și (6) rezultă $x\in\mathbb{Q}$. Dacă $b(1-a)\neq c^2$ din (5) și (6) rezultă $x\in\mathbb{Q}$.

Rămâne deci cazul $\begin{cases}(1-a)^2=bc & (7)\\ c(1-a)=b^2 & (8)\\ b(1-a)=c^2 & (9)\end{cases}$. Scăzând (8) și (9) rezultă

$(c-b)(b+c-a+1)=0$ (10). Dacă $b=c$ rezultă $x+y=1$ sau $x=y$. Dacă $x=y$ atunci $x^2=a$ și $x^2+x=b$ si contradicția $x=b-a\in\mathbb{Q}$. Deci $b\neq c$ din (10) avem $a-1=b+c$ și (7) devine $(b+c)^2=bc\Leftrightarrow\left(b-\dfrac{c}{2}\right)^2+\dfrac{3c^2}{4}=0$ și deci $b=\dfrac{c}{2}$ și $c=0$ adică din nou $b=c$. Rezultă deci $x+y=1$. Un exemplu de numere care îndeplinesc condițiile din enunț este $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

L. Panaitopol

168. Ecuația se scrie $4x^2+4x+1=16y^2+16y+1$ adică $(4y+2)^2-$ $-(2x+1)^2=3$ sau $(4y+2x+3)(4y-2x+1)=3$. Cum $x,y>0$ avem $4y+2x+3>3$, contradicție. Soluții raționale se pot obține considerând $\begin{cases}4y+2x+3=3\lambda\\ 4y-2x+1=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{Z}^*$.

Obținem soluțiile $\left(\dfrac{3\lambda^2-2\lambda-1}{4\lambda},\ \dfrac{3\lambda^2-4\lambda+1}{8\lambda}\right),\lambda\in\mathbb{Z}^*$.

169. Este suficient să arătăm că există o infinitate de perechi (x,y), $x,y\in\mathbb{N}$ astfel ca $a<\sqrt{x}-y<b$ adică $(a+y)^2<x<(b+y)^2$. Este suficient ca

$$(b+y)^2-(a+y)^2>1 \qquad (1)$$

pentru că se alege apoi $x\in\mathbb{N}$, $x\in\left((a+y)^2,\ (b+y)^2\right)$. Condiția (1) se scrie $y>\dfrac{1+a^2-b^2}{2(b-a)}$ și este îndeplinită pentru o infinitate de numere naturale y.

7. DIVERSE

170. Avem

$$x_n = \frac{\overbrace{11\ldots1}^{n}\overbrace{07\ldots7}^{n}\overbrace{81\ldots1}^{n+1}}{3} = \frac{1+10+\ldots+10^n+8\cdot10^{n+1}+7(10^{n+2}+10^{n+3}+\ldots+10^{2n+1})}{3} +$$

$$+\frac{10^{2n+3}+\ldots+10^{3n+2}}{3} = \frac{10^{n+1}-1}{27}+\frac{8\cdot10^{n+1}}{3}+7\cdot10^{n+2}\frac{(10^n-1)}{27}+10^{2n+3}\frac{(10^n-1)}{27} =$$

$$= \frac{10^{n+1}-1+72\cdot10^{n+1}+7\cdot10^{2n+2}-7\cdot10^{n+2}+10^{3n+3}-10^{2n+3}}{27} =$$

$$= \frac{10^{3n+3}-3\cdot10^{2n+2}+3\cdot10^{n+1}-1}{27} = \left(\frac{10^{n+1}-1}{3}\right)^3 =$$

$$= [3(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)]^3.$$

171. Avem $na = (a-b)C + R$ cu $0 \le R < a-b$ și $nb = (a-b)C_1 + R_1$ cu $0 \le R_1 < a-b$. Prin scădere avem $n(a-b) = (C-C_1)(a-b) + R - R_1$ și deci $a-b \mid R-R_1$. Cum $|R-R_1| < a-b$ rezultă $R_1 = R$ și apoi $C_1 = C-n$.

172. 1. Dacă $n = 4m$, $m \ge 2$ avem $a = 2m-1$, $b = 2m+1$.

2. Dacă $n = 4m+1$, $m \ge 2$ avem $a = 2m$, $b = 2m+1$.

3. Dacă $n = 4m+2$, $m \ge 2$ avem $a = 2m-1$, $b = 2m+3$.

4. Dacă $n = 4m+3$, $m \ge 1$ avem $a = 2m+1$, $b = 2m+2$. În toate cazurile avem $(a, b)=1$. De exemplu, în cazul 3 presupunem $p \mid a$ și $p \mid b$ rezultă că p este impar și $p \mid (2m+3)-(2m-1) = 4$ și deci $(a, b) = 1$.

173. Fie $ab = x^3$, $ca = y^3$, $bc = z^3$. Rezultă $(abc)^2 = (xyz)^3$ și deci $\sqrt[3]{abc} = \frac{abc}{xyz} \in \mathbb{Q}$. Cum $abc \in \mathbb{Q}$ rezultă $\sqrt[3]{abc} = d \in \mathbb{Z}$ și deci $abc = d^3$. Rezultă $a = (d/z)^3$ adică $\sqrt[3]{a} = d/z \in \mathbb{Q}$ și deci $\sqrt[3]{a} = A \in \mathbb{Z}$ adică $a = A^3$ etc.

174. Fie b baza căutată rezultă $b \ge 10$. Avem $r = \frac{7b^2+9b+2}{2b^2+9b+7} = \frac{(b+1)(7b+2)}{(b+1)(2b+7)} =$

$= \frac{7b+2}{2b+7} < 4$. Cum $r > 1$ și $r \in \mathbb{N}$ rezultă $r \in \{2,3\}$. Convine numărul $b = 19$.

175. Avem $10^{n-1} \le n^n < 10^n$ și deci $n < 10$ și $\left(\frac{10}{n}\right)^n \le 10$. Verificăm $n \in \overline{1,9}$ și constatăm că $n \in \{1,8,9\}$.

176. Avem $a_{n+10} = a_n \Leftrightarrow (n+20)^{n+20} - n^n \vdots 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+20)^{n+20} - (n+20)^n - ((n+20)^n - n^n) \vdots 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+20)^n[(n+20)^{20} - 1] - (20)((n+20)^{n-1} + (n+20)^{n-2} + \ldots + n^{n-1}) \vdots 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+20)^n((n+20)^4 - 1)((n+20)^{16} + (n+20)^{16} + (n+20)^{12} + \ldots - 1) \vdots 10$. Însă pentru $a \in \mathbb{Z}$, $a(a^4 - 1) \vdots 10$ deoarece $a^5 - a \vdots 5$ și $a(a-1) \vdots 2$.

177. Pentru $x = 10^n - 1$ avem $x^2 = \underbrace{99\ldots9}_{n-1}8\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1$, și deci $s(x^2) = 9n$. Numerele $x = 10^n - 1$, $y = 10^m - 1$, $z = 10^{m+n} - 1$ verifică ecuația pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

178. Presupunem că $2^m = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$ și $2^n = \sum_{i=0}^{k} a_{\sigma(i)} 10^i$. Dacă $m > n$ atunci $2^m < 10 \cdot 2^n$ și deci $m - n \leq 3$. Avem $2^m = \sum_{i=0}^{k} a_i (9+1)^i = \mathfrak{M}9 + \sum_{i=0}^{k} a_i$ și $2^n = \mathfrak{M}9 + \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}$. Cum $\sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} a_{\sigma(i)}$ rezultă $2^m - 2^n = \mathfrak{M}9$ adică $2^n(2^{m-n} - 1) = \mathfrak{M}9$ ceea ce este în contradicție cu $1 \leq m - n \leq 3$.

179. Considerăm sumele $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ pe care le împărțim la n: $S_k = nq_k + r_k$, cu $k \in \overline{1, n+1}$. Cele $n + 1$ resturi r_k pot fi 0, 1, ..., $n - 1$. Deci două dintre resturi sunt egale. Fie $1 \leq i < j \leq n$ astfel ca $r_i = r_j$, rezultă $S_j - S_i = n(q_j - q_i)$ și deci $n \mid S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$.

180. Un număr natural se scrie $n = 2^\alpha a$ cu $(a, 2) = 1$ și $\alpha \geq 0$. Deoarece există numai 50 de numere impare mai mici ca 100 rezultă că dintre cele 51 de numere există două de forma $2^\alpha a$, $2^\beta a$ cu a impar. Dacă $\alpha \geq \beta$ atunci $2^\alpha a \vdots 2^\beta a$.

181. Avem $1 = nq_1 + r_1$

$11 = nq_2 + r_2$

$111 = nq_3 + r_3$

$\vdots$

$\underbrace{11\ldots1}_{n+1} = nq_{n+1} + r_{n+1}$ cu $r_i \in \overline{0, n-1}$. Rezultă că două resturi sunt egale adică $r_i = r_j$ și deci prin scădere avem $11\ldots100\ldots0 = n(q_i - q_j)$ și deci $n \mid 1\ldots1 \cdot 10^{i-j}$. Deoarece $(n, 10) = 1$ rezultă $n \mid 11\ldots1$.

182. Fie $\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$. Punem condiția $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

Se găsește $m=\frac{3n}{n+3}=3-\frac{9}{n+3}$ și deci $n+3\mid 9$. Cum $n>1$ singura posibilitate este $n+3=9$ adică $n=6$ și $m=2$. Într-adevăr avem $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{3}$.

O. Sacter

183. Numărul are $9+90\cdot 2+3=192$ de cifre. După elimare rămân 172 de cifre. Numărul rămas va fi maxim dacă primele cifre vor fi mari. Eliminăm de la începutul numărului 1, 2, ..., 8 pentru ca prima cifră să fie 9. Apoi eliminăm cifrele situate după 9 și anume 1, 0, 1, 1, 1, 2, ..., 1, 4, 1 și ar urma cifra 5. În sfârșit eliminăm cifra 1 situată după 5. Numărul maxim este 9561718...99100.

184. Fie $1\le k\le n-1$. Avem $\left[\sqrt{m}\right]=k$ pentru $k^2\le m\le k^2+2k$ adică pentru $2k+1$ valori și deci valoarea k apare de $2k+1$ ori. Avem $S=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+$ $+\sum_{k=1}^{n-1}k=2\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

185. Numărul se scrie $N=a\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}10^k$. Deoarece $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^2+...+x^{2^n-1}$ avem $N=a\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(10^{2^k}+1)$. Deoarece $(10^{2^k}+1,10^{2^h}+1)=1$ pentru $k\ne h$, enunțul se verifică.

186. Avem $(m+1)+(m+2)+...+(n-1)=1000$ adică $(m+n)(n-m-1)=$ $=2000=2^4\cdot 5^3$. Numerele $m+n$ și $n-m-1$ sunt unul par iar celălalt impar, deci unul dintre ele se divide la 16. Cum $n-m-1<m+n$ rezultă $(n-m-1)^2<2000$ și deci $n-m-1<45$. Avem cazurile: a) $n-m-1=1$ și rezultă $m+n=2000$. Avem $m=999$, $n=1001$. b) $n-m-1=5$ și rezultă $m=197$, $n=203$. c) $n-m-1=16$ și rezultă $m=54$, $n=71$ și d) $n-m-1=25$ și rezultă $m=27$, $n=53$.

187. Avem $a-1=\frac{p}{q}$ și $\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2+1}\right)...\left(1+\frac{1}{m^2+n}\right)=$ $=\frac{m^2+1}{m^2}\cdot\frac{m^2+2}{m^2+1}\cdot...\cdot\frac{m^2+n+1}{m^2+n}=\frac{m^2+n+1}{m^2}=1+\frac{n+1}{m^2}$. Alegem m, n astfel ca $n+1=pq$, $m=q$ și obținem enunțul. Putem de asemenea alege $n+1=pqr^2$ și $m=qr$.

188. Fie S suma elementelor din A. Avem $3S=1+2+...+n$ adică $S=\frac{n(n+1)}{6}$ și deci $n=6k$, sau $n=6k-1$.

a) $n=6k$. Suma elementelor din fiecare mulțime este $k(6k+1)$. Se formează perechile $(i,6k+1-i)$ $i\in\overline{1,3k}$. Avem $3k$ perechi și plasăm în fiecare mulțime câte k perechi. Suma elementelor din fiecare mulțime este $k(i+6k+1-i)=k(6k+1)$.

b) $n=6k-1$. Suma elementelor din fiecare mulțime este $k(6k-1)$. Formăm perechile $(i,6k-1-i)$ $i\in\overline{1,3k-1}$ la care adăugăm elementul $6k-1$. Formăm două mulțimi cu k perechi și una cu $k-1$ perechi și cu elementul $6k-1$. Suma elementelor din fiecare mulțime este $k(6k-1)$.

189. Este necesar și suficient ca $3x+1=\pm 2^k$ cu $k\in\overline{0,a}$. Pentru k par se obține numai $x=\frac{2^k-1}{3}\in\mathbb{Z}$. Pentru k impar se obține numai $x=\frac{-(2^k+1)}{3}\in\mathbb{Z}$. Așadar ecuația are $a+1$ soluții.

D. Brânzei

190. Dacă a este impar atunci $x^2+ax=x(x+a)$ este par și în M_1 numerele au aceeași paritate cu b. În M_2 sunt numere cu aceeași paritate cu c. Dacă $c=b+1$ atunci M_1 și M_2 nu au elemente comune. Dacă $a=2A$ cu $a\in\mathbb{Z}$ elementele lui M_1 sunt $(x+A)^2+b-A^2$. Pătratele perfecte sunt de forma $\mathfrak{M}4$ sau $\mathfrak{M}4+1$ și deci în M_1 sunt elemente de forma $\mathfrak{M}4+b-A^2+r$ cu $r\in\{0,1\}$. În M_2 elementele au forma $\mathfrak{M}4+c$ și alegem $c=b-A^2+2$.

191. Presupunem $(x+1)(x+2)...(x+n)=y^n$. Avem $(x+1)^n<(x+1)\cdot$ $\cdot(x+2)...(x+n)<(x+n)^n$ și deci $(x+1)^n<y^n<(x+n)^n$. Rezultă $x+1<y<x+n$ și deci $y=x+r$ cu $r\in\overline{2,n-1}$. Avem relația $(x+1)(x+2)...(x+n)=(x+r)^n$. Fie p un factor prim al lui $x+r+1$. Rezultă că $p\mid(x+r)^n$ adică $p\mid x+r$ și deci se obține contradicția $p\mid(x+r+1)-(x+r)=1$.

192. Fie a numărul format din primele două cifre ale lui 2^n și ale lui 5^n. Atunci avem $n\geq 4$, $a10^k<2^n<(a+1)10^k$ și $a10^h<5^n<(a+1)10^h$. După înmulțirea relațiilor avem $a^2 10^{k+h}<10^n<(a+1)^2 10^{k+h}$. Cum $10\leq a\leq 99$ rezultă $10^2\leq a^2$ și $(a+1)^2\leq 10^4$ și deci $10^{k+h+2}<10^n<10^{k+h+4}$ adică $n=k+h+3$. Avem $a^2<10^3<(a+1)^2$ adică $a<\sqrt{1000}<a+1$ și deci $a<31,6...<a+1$ adică $a=31$.

193. Pentru $k=\sum_{i=0}^{m}a_i 10^i$ avem $k-S(k)=\sum_{i=0}^{m}a_i(10^i-1)=\mathfrak{M}9$. În cazul nostru $a-n\vdots 9$, $b-n\vdots 9$, $a+b-n\vdots 9$. Rezultă $9\mid(a+b-n)-(a-n)-(b-n)=n$. Deci $n,a,b=\mathfrak{M}9$. Arătăm că pentru $n=9k$ putem alege $a=b$ cu proprietatea cerută. Pentru $n=9$ alegem $a=b=54$ și avem $S(a)=S(b)=S(108)=9$. Pentru $n=18$

alegem $a=b=954$ și avem $S(a)=S(b)=S(1908)=18$. Pentru $n=9k$ alegem $a=b=\underbrace{999...9}_{k-1}54$. Avem $a+b=1\underbrace{9...99}_{k-1}908$ și deci $S(a)=S(b)=S(a+b)=9k$.

M. Lascu, V. Zidaru

194. Elementele din $S_1(n)$ sunt 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, ... Pentru patru numere consecutive suma resturilor este 6. Așadar $S_1(4k)=6k$, $S_1(4k+1)=6k+1$, $S_1(4k+2)=6k+3$, $S_1(4k+3)=6k+6$. Așadar $S_1(n)=\frac{3n}{2}+\alpha$ unde $\alpha\in\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right\}$.

Notăm $S_0(n)$ suma resturilor împărțirii la 3 a numerelor 1, 2, 3...n.

Resturile sunt 1, 2, 0, 1, 2, 0 ... . Avem $S_0(3k)=3k$, $S_0(3k+1)=3k+1$, $S_0(3k+2)=3k+3$ și deci $S_0(n)=\begin{cases} n & \text{dacă } n=3k \text{ sau } n=3k+1 \\ n+1 & \text{dacă } n=3k+2 \end{cases}$. Avem

$S_2(k)=S_0(2000)-S_0(k)=2001-S_0(k)$. Relația $S_1(m)=S_2(m)$ devine

$\frac{3m}{2}+\alpha+m+\beta=2001$ cu $\alpha+\beta\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}$, $m=800+2\frac{1-\alpha-\beta}{5}$. Din $5\mid\alpha+\beta-1$ rezultă $\alpha+\beta=1$ și $m=800$.

M. Fianu

195. Avem $px=k$ și $n-1<x\le n \Leftrightarrow n-1<\frac{k}{p}\le n \Leftrightarrow (n-1)p<k\le np$ și deci $[(n-1)p]+1\le k\le[np]$. Numărul de elemente al lui $A_n(p)$ este $[np]-[(n-1)p]$. Condiția cerută este $[na]-[(n-1)a]=[nb]-[(n-1)b]\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $n=1$ avem $[a]=[b]$. Pentru $n=2$ avem $[2a]-[a]=[2b]-[b]$ și deci prin inducție avem $[na]=[nb]\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $a>b$ atunci $a=b+\varepsilon$ cu $\varepsilon>0$ și $[na]=[nb+n\varepsilon]$. Pentru $n\ge\frac{1}{\varepsilon}$ avem $[na]\ge[nb+1]=1+[nb]>[nb]$. Pentru $a<b$ se obține deasemenea contradicție. Deci $a=b$.

E. Păltănea

196. Fie S_n suma căutată. Pentru $n=3$ avem $S_3=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}$. Pentru $n=4$ avem $S_4=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}$. Demonstrăm prin inducție că $S_n=1/2$. La trecerea

de la $n-1$ la n, dispar termeni cu $a+b=n$ adică $S=\sum\frac{1}{a(n-a)}$ cu $a<n-a$, $(a,n-a)=1$ și apoi termenii cu $b=n$. Deoarece $S=\frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{n-a}\right)=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{x_k n}$ cu $(x_k,n)=1$ și $x_k<n$ rezultă că $S_{n-1}=S_n$ adică $S_n=1/2$.

197. Fie $A=\{1,2,...,n\}$. Multipli lui a_i din A sunt distincți de cei ai lui a_j deoarece $[a_i,a_j]>n$. Numărul multiplilor lui a_i din A este $\left[\frac{n}{a_i}\right]$. Cu observația anterioară rezultă că $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]\le n$ și deci $n>\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}-k$ adică $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}<\frac{n+k}{n}<2$.

198. Presupunem că termenii șirului sunt $q_1,q_2,...,q_k$. Luăm $n=q_1^2q_2^2...q_k^2$ și avem $a_{n+1}\mid q_1^2q_2^2...q_k^2+a_n$. Cum $a_{n+1}=q_i$ rezultă $q_1\mid a_n$ și deci $a_n=q_1$. Deci q_2 este cel mai mare factor prim al lui $q_i(q_1^2a_2^2...q_{i-1}^2q_iq_{i+1}^2...q_k^2+1)$ adică numărul $q_1^2q_2^2...q_{i-1}^2q_iq_{i+1}^2...q_k^2+1$ are divizori primi $\le q_i$, adică o contradicție.

L. Panaitopol

199. Fie $a\ne b$. Pentru $y=n$ există x_n astfel încât $a^{x_n}+b^{x_n}=cd^n$. Avem $c^2d^{2n+2}=(a^{x_{n+2}}+b^{x_{n+2}})(a^{x_n}+b^{x_n})>\left(a^{\frac{x_n+x_{n+2}}{2}}+b^{\frac{x_n+x_{n+2}}{2}}\right)^2$, deci $cd^{n+1}>a^{\frac{x_n+x_{n+2}}{2}}+b^{\frac{x_n+x_{n+2}}{2}}$. Deoarece $cd^{n+1}=a^{x_{n+1}}+b^{x_{n+1}}$ rezultă $x_{n+1}>\frac{x_n+x_{n+2}}{2}$, deci $x_{n+2}-x_{n+1}<x_{n+1}-x_n$ pentru orice $n\ge 1$, adică s-a obținut contradicția $x_2-x_1>x_3-x_2>...>x_{n+1}-x_n>...>0$.

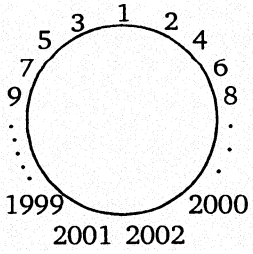
200. Dacă $n=x^2+y^2+z^2$, atunci $4n=(x+y+z)^2+(x-y-z)^2+(x+y-z)^2+$ $+(x-y+z)^2$. Notăm $x+y+z=a, x-y-z=b,\ x+y-z=c,\ x-y+z=d$ și avem $4n=a^2+b^2+c^2+d^2$ cu $a+b=2x=c+d$. Dacă $4n=a^2+b^2+c^2+d^2$ cu $d=a+b-c$ atunci $4n=a^2+b^2+c^2+(a+b-c)^2=(a+b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$. Notăm $x=a+b,\ y=a-c,\ z=b-c$ și avem $4n=x^2+y^2+z^2$. Dacă x, y sunt impare și z este par atunci avem contradicția $4n=\mathfrak{M}4+1+\mathfrak{M}4+1+\mathfrak{M}4$ și deci x, y, z sunt pare adică $x=2\alpha,\ y=2\beta, z=2\gamma$ și avem $n=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

L. Panaitopol

CAPITOLUL II
COMBINATORICĂ

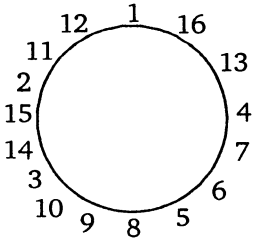
1. PUNCTE PE CIRCUMFERINȚĂ

1. Răspunsul este afirmativ. Într-adevăr, să observăm că numerele vecine lui 1 sunt în mod necesar 2 și 3; lângă 2 nu putem scrie decât 4 iar lângă 3 nu îl mai avem la dispoziție decât pe 5. În continuare scriem într-un sens numerele pare consecutive iar în celălalt sens pe cele impare consecutive (este singura posibilitate!). "Semicercurile" se "lipesc" cu secvențele ..., 1999, 2001 și 2002, 2000, ... respectiv – vezi figura - și condiția inițială este respectată și de "capetele semicercurilor" – numerele 2001 și 2002.



2. În primul caz răspunsul este negativ. Într-adevăr, din cele 11 numere avem 6 impare. În orice aranjare vom găsi două numere impare consecutive; suma acestora este un număr par mai mare ca 2, deci compus.

În al doilea caz este posibilă o astfel de aranjare:



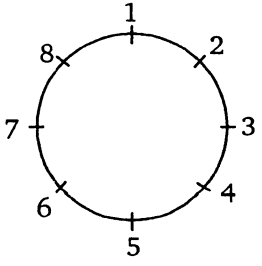
D.M. Bătinețu – Giurgiu

3. Să notăm cu v vârsta persoanei cea mai vârstnice. Conform ipotezei, v este media aritmetică a persoanelor din stânga – s – și dreapta – d. Cum $s, d \leq v$ și $v = \frac{s+d}{2}$, rezultă că $v = s = d$; astfel spus, cele 3 persoane au aceeași vârstă. Din aproape în aproape, constatăm că toate persoanele au aceeași vârstă v.

Cum suma vârstelor este $7v$, problema este rezolvată.

4. Vom arăta că fiecare jucător are un număr impar de fise câștigătoare, ceea ce rezolvă problema.

Presupunem prin absurd că avem un jucător cu un număr par de fise câștigătoare. Numerotăm jucătorii de la 1 la 8 și fie 1 cel cu număr par de fise. Atunci exact unul dintre jucătorii 2 și 8 au un număr impar; fie 2 cel cu un număr impar și 8 cu un număr par de fise. Urmează că 3 are un număr par iar 7 un număr impar de fise; 4 un număr par iar 6 un impar.



Dacă jucătorul 5 are un număr par de fise câștigătoare, atunci jucătorii 3, 4 și 5 au în total un număr par de fise, contradicție. Dacă jucătorul 5 are un număr impar, atunci contradicția se obține însumând numărul de fise câștigătoare ale jucătorilor 5, 6 și 7.

5. Să observăm că următoarele pătrate perfecte mai mari ca 16 sunt $25 = 16 + 9$ și apoi $36 = 16 + 20$. Într-o aranjare circulară, numerele vecine lui 16 ar trebui sa fie 9 și 20, ceea ce nu este posibil. O aranjare pe o linie este însă posibilă: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

6. Fie n numărul de tăieturi. Deoarece au fost tăiate $1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ numere și următoarea tăietură nu a mai putut fi efectuată, înseamnă că pe circumferință au rămas mai puțin de $n+1$ numere, adică

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 2003 < \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

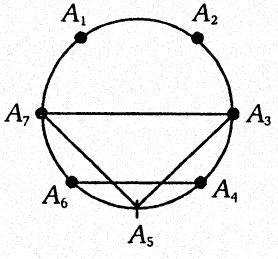
Cum $62 \cdot 63 = 3906 \le 4006 < 63 \cdot 64 = 4032$, rezultă că $n = 62$. Au fost tăiate $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3906}{2} = 1953$ numere, deci au rămas $2003 - 1953 = 50$ de numere.

7. Prima rotație elimină numerele 1, 11, 21, 31, ..., 2001, adică numerele cu ultima cifră 1. Următorul număr este 9 și apoi 19, 29, 39, ..., 1999. Apoi 7, 17, 27, ..., 1997; 5, 15, 25, ..., 1995 și 3, 13, 23, ..., 1993. Ar urma 1, care este chiar primul eliminat. În concluzie, au fost tăiate toate numerele impare și au rămas cele pare: 1001 numere.

8. Notăm cu 1, 2, 3, ..., 10 scaunele așezate la masă. Deoarece sunt 5 fete, conform principiului cutiei vom avea cel puțin 3 fete așezate pe scaune de aceeași paritate (1, 3, 5, 7, 9 sau 2, 4, 6, 8, 10).

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că avem cel puțin 3 fete așezate pe scaune impare. Este necesar atunci ca două scaune impare consecutive (1, 3 sau 3, 5 sau 5, 7 sau 7, 9 sau 9, 1) să fie ocupate de fete. Persoana care stă între ele (2 sau 4 sau 6 sau 8 sau 10, respectiv) ne rezolvă problema.

9. Este evident că există două vârfuri consecutive de aceeași culoare; notând $A_1, A_2, ..., A_7$ vârfurile heptagonului, fie A_1, A_2 vârfurile de aceeași culoare. Fără să restrângem generalitatea, să presupunem că această culoare este albastru.



Dacă A_3 este colorat cu albastru, cum $A_1A_2 = A_2A_3$, problema se încheie. Prin urmare, să presupunem că A_3 (și analog A_7) este colorat cu roșu.

Considerăm că A_4 este colorat cu roșu; atunci $A_7A_3 = A_7A_4$ și cerința este satisfăcută. Deci A_4 (și analog A_6) sunt colorate cu albastru. În acest moment dacă A_5 este colorat cu roșu avem triunghiul $A_5A_3A_7$, iar dacă A_5 este colorat cu albastru avem triunghiul $A_5A_4A_6$. Cum ambele sunt isoscele, rezultă concluzia.

10. Fie $a_1, a_2, ..., a_{2003}$ numerele date și $c = |a_{i+1} - a_i|$, $i = \overline{1,2003}$, cu convenția $a_{2004} = a_1$. Atunci $a_{i+1} - a_i = \pm c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$. Avem

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_{2002} - a_{2003}) + (a_{2003} - a_1) = 0,$$

deci $\underbrace{\pm c \pm c \pm c \pm ... \pm c}_{2003 \text{ termeni}} = c(\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm ... \pm 1}_{2003 \text{ termeni}}) = 0$. Numărul $\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm ... \pm 1}_{2003 \text{ termeni}}$ este impar, deci $c = 0$. Prin urmare $a_1 = a_2 = ... = a_{2003}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Dinu Șerbănescu

11. Numim *roșu* un poligon având toate vârfurile în punctele colorate cu roșu. În caz contrar, poligonul se numește *albastru*. Să observăm că fiecărui poligon *roșu* i se poate asocia în mod unic unui *albastru*, adăugând punctul *albastru* vârfurilor celui *roșu*. Prin urmare numărul poligoanelor *albastre* este mai mare decât al celor *roșii*. Inegalitatea este strictă, deoarece există poligoane *albastre* care nu sunt în această corespondență cu unul *roșu*; este vorba de triunghiurile *albastre*.

12. Fie s suma tuturor celor 108 numere și considerăm o secvență de 8 numere consecutive. Împărțim celelalte 100 de numere în 5 grupe de 20 consecutive; atunci suma celor 8 este egală cu $s - 5 \times 1000$, deci e constantă, indiferent de poziția pe care a celor 8 consecutive.

Fie acum o secvență arbitrară de 4 numere consecutive și împărțim restul de $108 - 4 = 104$ în 13 grupe de 8. Același raționament ca mai sus arată că suma oricăror 4 numere consecutive este constantă și egală cu $\frac{1000}{5} = 200$ (considerând o secvență cu 20 de numere consecutive și formând 5 grupe de 4).

Fie acum 5 numere consecutive. Cum suma primelor patru numere este egală cu suma ultimelor patru, atunci primul și ultimul sunt egale. În consecință, al 19-lea număr este egal cu al treilea, al 50-lea număr cu al doilea și al 100-lea cu al patrulea. Cum $200 = 1 + 19 + 50 + 130$, rezultă că al 100-lea (și al patrulea) este 130.

13. Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ aceste numere; atunci $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 = 0$. Să observăm că produsele x_1x_2, $x_2x_3, ..., x_nx_1$ sunt egale cu 1 sau –1.

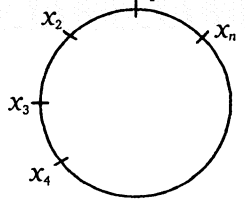
Pentru ca suma să fie 0 este necesar ca numărul de termeni egali cu 1 să fie egal cu numărul de termeni egali cu –1. Notând cu m numărul termenilor egali cu 1 (deci și cu –1) rezultă că $n = 2m$. În plus, observăm că

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot ... \cdot x_{n-1}x_n \cdot x_nx_1 = x_1^2x_2^2...x_n^2 = 1,$$

iar pe de altă parte

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot ... \cdot x_{n-1}x_n \cdot x_nx_1 = 1^m(-1)^m.$$

Atunci $(-1)^m = 1$, deci m este par. Rezultă că n se divide cu 4, ceea ce trebuia demonstrat.



14. Vom asocia fiecărei persoane numărul 1 dacă este femeie sau -1 dacă este bărbat și fie $x_1, x_2, ..., x_n$ secvența acestor numere citite în sens antiorar. Observăm că $x_i x_{i+1} = 1$ dacă și numai dacă persoana x_i are același sex cu persoana din dreapta sa, adică x_{i+1} (notăm $x_{n+1} = x_1$).

Conform ipotezei, jumătate din numerele $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n$, x_nx_1 sunt 1 și jumătate -1. Cum numărul produselor este n, rezultă că n este par; fie $n = 2m$. Pe de altă parte,

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot ... \cdot x_nx_1 = 1^m(-1)^m \text{ și}$$
$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot ... \cdot x_nx_1 = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot ... \cdot x_n^2 = 1,$$

deci $(-1)^m = 1$. Rezultă că m este par și deci n se divide cu 4, ceea ce trebuia demonstrat.

15. Vom rezolva problema în cazul general, considerând $n \geq 2$ puncte colorate.

Dacă $n = 2$, cele 2 arce formate sunt simultan bicolore sau monocolore, deci asertiunea este dovedită. Pentru $n = 3$, considerăm că în configurația anterioară se mai adaugă încă un punct. Distingem cazurile:

a) Punctul aparține unui arc bicolor. Indiferent de culoarea acestui punct, arcul bicolor se împarte într-un arc bicolor și unul monocolor; prin urmare numărul arcelor bicolore rămâne constant.

b) Punctul aparține unui arc monocolor. Dacă punctul are aceeași culoare ca a capetelor acestui arc, atunci se obțin două arce monocolore și numărul arcelor bicolore rămâne constant. Dacă punctul are culoarea contrară a capetelor arcului considerat, ambele arce formate sunt bicolore și numărul total de arce bicolore crește cu 2.

Reluând analiza, observăm că numărul de arce bicolore își păstrează paritatea ori de câte ori este adăugat un nou punct; cu aceasta demonstrația este încheiată.

16. Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ numerele de pe circumferință. Atunci $a_{i+1} + 1 = a_i + a_{i+2}$, oricare ar fi $i \in \{0,1,2,...,99\}$, cu convențiile $a_{101} = a_1$ și $a_{100} = a_0$ (mai general, $a_{100+i} = a_i$ pentru orice $i \geq 0$).

Adunând egalitățile $a_{i+1} + 1 = a_i + a_{i+2}$ și $a_{i+2} + 1 = a_{i+1} + a_{i+3}$ deducem că $a_i + a_{i+3} = 2$, oricare ar fi $i \geq 0$. Rezultă că $a_i + a_{i+3} = 2 = a_{i+3} + a_{i+6}$, deci $a_i = a_{i+6}$, oricare ar fi $i \geq 0$. Prin urmare, $a_1 = a_7 = a_{13} = a_{19} = ... = a_{91} = a_{97} = a_{103}$, care prin convenție este a_3; în continuare avem

$$a_3 = a_9 = a_{15} = a_{21} = ... = a_{93} = a_{99} = a_{105} = \text{ (prin convenție)}$$
$$= a_5 = a_{11} = a_{17} = ... = a_{95} = a_{101} = a_1.$$

În concluzie, toate numerele a_i cu rangul impar sunt egale. În mod analog se deduce că toate numerele a_i de rang par sunt egale.

Din relațiile $a_2+1=a_1+a_3$ și $a_3+1=a_2+a_4$ rezultă că $a_2+1=2a_1$ și $a_1+1=2a_2$. Prin scădere obținem $3a_2=3a_1$, deci $a_1=a_2$ și apoi $a_1=1$. În consecință, toate numerele sunt egale cu 1.

17. Grupăm numerele în 10 perechi de numere consecutive:

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, ..., \{19, 20\}.$$

Strategia celui de-al doilea jucător constă în final în obținerea unei astfel de perechi, după eliminarea a $6\times3=18$ numere. Pentru a realiza acest lucru, al doilea jucător procedează astfel:

1) dacă primul jucător taie inițial 3 numere din 3 perechi distincte, al doilea le taie pe celelalte 3;

2) dacă primul jucător taie ambele numere dintr-o pereche și unul din altă pereche, al doilea taie numărul rămas din ultima pereche și ambele numere dintr-o nouă pereche.

În ambele cazuri, după 2 tăieturi a 3 numere rămân pe circumferință 7 perechi complete. Procedând similar vor rămâne 4 perechi și apoi o pereche, ceea ce era necesar.

18. Strategia primului constă unirea a 6 puncte cu toate segmentele posibile $\frac{6\cdot5}{2}=15$ segmente. Cum 15 este impar, înseamnă că ultimul segment este trasat de primul jucător.

Pe cerc mai rămân 3 puncte neunite (cu nici un alt punct). La următoarea "mutare", al doilea jucător va trasa un segment având un capăt (sau ambele) printre aceste 3 puncte. Atunci primul va trasa un segment cu un capăt (sau ambele) printre cele (cel mult) 2 puncte rămase și câștigă.

Observație. Jocul poate dura mai puțin dacă după unirea a 6 puncte, cel de-al doilea nu dorește să se construiască toate cele 15 segmente posibile între acestea și folosește unul din cele 3 puncte rămase.

19. Vom rezolva problema în cazul a n numere ($n=2003$). Fie N numărul rămas la final. Să observăm că o parcurgere a circumferinței elimină numerele pare; prin urmare N e impar. Mai mult, $N=1$ dacă și numai dacă n este o putere a lui 2. Într-adevăr, dacă $n=2^m$, după o parcurgere a cercului sunt șterse numerele pare rămânând 2^{m-1} numere, cele impare: 1, 3, 5, ..., 2^m-1.

Renotându-le cu 1, 2, ..., 2^{m-1}, repetăm raționamentul până când rămân doar numerele 1, 2 și apoi 1. Observând că numărul 1 e singurul ce nu se modifică prin renotările succesive, rezultă că $N=1$. Reciproc, dacă $N = 1$ arătăm că $n=2^m$, m natural. Pentru aceasta, observăm că dacă pe cerc este inițial un număr impar de numere, atunci după ștergerea numerelor 2, 4, ..., $n-1$ se sare n și va fi șters 1. Atunci $n=2k$. Reluând raționamentul, după ce sunt șterse numerele 2, 4, ..., $2k$ rămân pe cerc k numere și iar e necesar ca numărul k să fie par. Continuând în acest fel, deducem că $n=2^m$ cu m număr natural.

Considerăm acum cazul $N>1$, N impar. Până la N sunt șterse numerele 2, 4, ..., $(N-1)$ adică $\frac{1}{2}(N-1)$ numere. Eliminându-le, pe cerc rămân $n-\frac{1}{2}(N-1)$ numere iar primul ce urmează a fi sărit este N. Știind că N "rezistă" până la sfârșit, în baza celor demonstrate anterior rezultă că pe cerc mai sunt 2^m numere, cu m număr natural. Atunci $n-\frac{1}{2}(N-1)=2^m$ sau $N=2n-2^{m+1}+1$. Din $N<n$ rezultă $2n-2^{m+1}+1<n$, deci $n<2^{m+1}$. Pe de altă parte $2^m=n-\frac{1}{2}(N-1)\le n$, prin urmare $2^m\le n<2^{m+1}$.

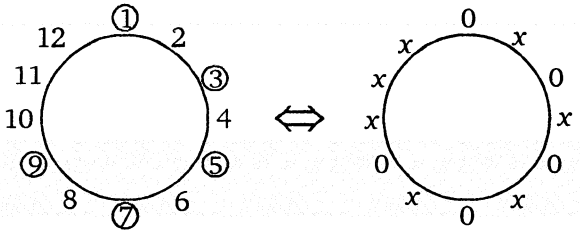
Dacă $n=2003$ avem $2^{10}=1024\le 2003<2^{11}=2048$, deci $N=2\cdot 2003-$ $-2^{10+1}+1=4007-2048=1955$.

20. Vom presupune prin absurd că este posibil să obținem 9 cifre de zero după n pași; acceptăm că la pasul n s-a obținut *prima dată* doar cifra 0. Atunci la pasul $n-1$ toate cifrele trebuiau să fie egale, și valoarea acestora trebuie să fie 1 (dacă ar fi 0 se contrazice minimalitatea lui n). La pasul $n-2$, toate cifrele alăturate sunt prin urmare diferite, deci 0 și 1 alternează. Acest lucru nu este posibil, deoarece avem un număr impar – 9 – de numere pe circumferință. Contradicția este obținută.

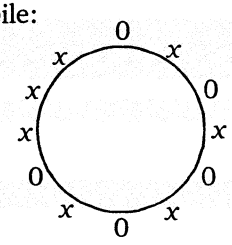
21. Să plasăm pe circuit o altă mașină având suficientă benzină pentru a încheia un tur. În timp ce parcurge circuitul, această mașină ia benzina celor n mașini inițial aflate pe pistă. Fie A punctul în care nivelul de benzină este minim; să observăm că în punctul A *se află o mașină* ! (astfel mașina adițională ar mai avea o oarecare distanță de parcurs până va întâlni o mașină pentru a-și crește nivelul de benzină). Atunci mașina aflată inițial în punctul A poate parcurge turul de circuit.

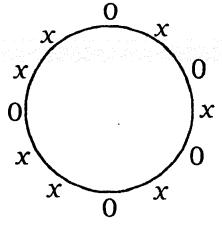
22. Numerotăm cu 1, 2, ..., 12 persoanele aflate la masă (în sensul acelor de ceasornic).

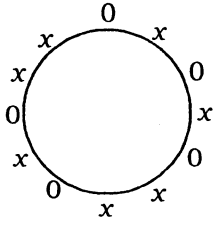
Pentru a marca o grupă de 5 persoane (de exemplu 1, 3, 5, 7, 9) vom folosi un șablon cu 12 simboluri: 5 de 0 și 7 de x, zerourile corespunzând persoanelor alese în această grupă.



Într-un șablon se află 5 zerouri, oricare două nevecine; prin urmare avem 3 șabloane posibile:

1)  când există 3 x-uri consecutive;

2)  când există 2 grupe consecutive de 2 x-uri;

3)  când există 2 grupe neconsecutive de 2 x-uri.

Fiecare din cele 3 șabloane generează prin rotație câte 12 grupe de 5 persoane. În consecință, există 36 de grupe posibile.

23. Împărțim cercul în 12 arce egale (având măsura de 30^0) prin 6 diametre. Capetele acestor diametre sunt vârfurile unui dodecagon regulat. Afirmăm că există o configurație în care aceste vârfuri să nu fie în nici unul din cele 1200 de puncte date.

Într-adevăr, numărul dodecagoanelor regulate înscrise în cercul dat este infinit, în timp ce numărul celor care au un vârf în mulțimea celor 1200 de puncte date este finit și afirmația este dovedită.

Cele 1200 de puncte date se află deci în interiorul celor 12 arce de măsură 30^0. Dacă unul dintre acestea conține 100 de puncte, problema este demonstrată; în caz contrar, există unul având mai puțin de 100 de puncte și unul având mai mult de 100 de puncte. Vom roti arcul având mai puțin de 100 de puncte către cel având mai mult de 100 de puncte. În timpul rotației, arcul întâlnește unele din punctele date inițial și "pierde" unele din cele aflate inițial la interior. Să observăm că numărul de puncte interioare se modifică astfel:

- crește cu 1, dacă întâlnește un punct dat;
- scade cu 1, dacă un punct interior iese din interiorul arcului;
- rămâne nemodificat atunci când simultan un punct intră și altul iese din interiorul arcului (situația apare când cele două puncte determină un arc de măsură 30^0).

Deoarece numărul de puncte interioare la începutul rotației este mai mic decât 100 și la sfârșit este mai mare ca 100, iar variația numărului de puncte este de 1 punct, rezultă că la un moment dat a existat o poziție în care arcul conține exact 100 de puncte, ceea ce trebuia demonstrat (cu alte cuvinte, dacă într-un șir numerele vecine sunt consecutive – adică au modulul diferenței 1 – iar capetele șirului sunt numere întregi a și b, atunci în șirul dat apar toate numerele întregi dintre a și b).

24. Numim carte fixă o carte ce poate fi pasată doar de un număr finit de ori. De exemplu, cărțile 25 sunt fixe, deoarece ele nu pot fi pasate, având valoarea maximă. Apoi cele 2 cărți 24 sunt fixe, deoarece ele sunt pasate – eventual – doar de cei 2 jucători cu cărțile 25. Urmează cele 2 cărți cu 23, deoarece după ce cărțile 24 au devenit fixe, cărțile 23 mai pot fi pasate doar de către cei 4 cu cărți superioare.

Din aproape în aproape constatăm că toate cărțile de la 14 la 25 sunt fixe; în total $2 \cdot 12 = 24$.

Să considerăm poziția în care aceste cărți au devenit fixe, adică și-au epuizat numărul (finit) de pasări posibile. Oricare două stau în mâini diferite, adică aparțin la 24 de jucători diferiți (altfel, conform regulii jocului una ar mai fi pasată).

Rămâne un jucător – A – fără o carte încă fixă. În mișcare sunt cele 26 de cărți cu numerele 1, 2, ..., 13.

După un număr de mișcări, jucătorul A va primi o carte cu numărul 13; aceasta devine fixă. Se mai pasează perechile de cărți cu numerele 1, 2, ..., 12 și cealaltă carte 13. După un alt număr de mișcări, acesta revine jucătorului A care realizează dubla și raționamentul este complet.

Observație. E limpede că jocul se poate încheia – conjunctural – mai repede pentru o configurație inițială particulară.

25. Vom presupune prin absurd că nu există două puncte diametral opuse care să fie marcate. Fie A, B două puncte marcate astfel încât arcul $\overset{\frown}{AB}$ să aibă lungimea 1 și notăm $A'B'$ punctele lor diametral opuse; așadar A', B' sunt nemarcate (fig. 1). Fie punctele C, D ca în figura 1, astfel încât arcele $\overset{\frown}{CB'}$, $\overset{\frown}{B'A'}$, $\overset{\frown}{A'D}$ să fie de lungime 1. Atunci $\overset{\frown}{CD}$ are lungimea 3 și deci C, D trebuie să fie puncte marcate. În acest fel observăm că unui arc de lungime 1 îi corespunde unul de lungime 3, care "conține" arcul diametral opus celui de lungime 1. Să notăm acum cu a, b, c numărul arcelor de lungime 1, 2 respectiv 3 ce aparțin arcului mic $\overset{\frown}{AC}$ și cu a', b', c' numărul arcelor de lungimi 1, 2 respectiv 3 ce aparțin arcului mic $\overset{\frown}{BD}$. Corespondența obținută anterior între arcele de lungime 1 și cele de lungime 3 ne asigură că $a = c'$ și $a' = c$. Conform ipotezei, $a + a' = n - 1$, unul din arcele de lungime 1 fiind $\overset{\frown}{AB}$. În plus, $a + 2b + 3c = 3n - 2$, de unde $a + 2b + 3a' = 3n - 1 \Rightarrow$

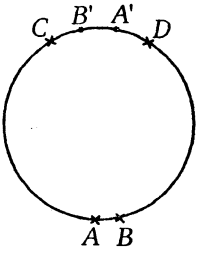
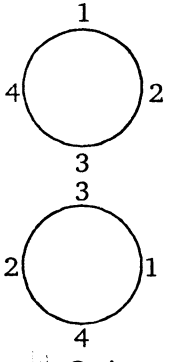


Figura 1

$\Rightarrow 2b + 2a' = 3n - 2 - (a - a') = 3n - 2 - (n - 1) = 2n - 1$, ceea ce conduce la o contradicție.

26. Fie $2n$ numărul persoanelor. Pentru fiecare persoană k notăm l_k numărul de scaune cu care persoana k s-a deplasat (în sens orar) după rearanjare. De exemplu, dacă inițial ordinea era



și după pauză este

atunci $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 2, l_4 = 3$.

Cerința problemei revine la a demonstra că există două persoane $i \neq j$ pentru care $l_i = l_j$. Presupunem prin absurd că numerele $l_1, l_2, ..., l_{2n}$ sunt distincte două câte două; cum $l_k \in \{0,1,...,2n-1\}$, rezultă că $l_1, l_2, ..., l_{2n}$ reprezintă o permutare a numerelor 0, 1, ..., $2n-1$ și avem

$$l_1 + l_2 + ... + l_{2n} = 0 + 1 + ... + (2n-1) = (2n-1)n. \quad (1)$$

Numerotăm scaunele în sens orar de la 1 la n. Persoana k – care inițial ocupa scaunul numărului k – este așezată după pauză pe scaunul $k + l_k$, dacă $k + l_k \leq 2n$ sau pe scaunul $k + l_k - 2n$, dacă $k + l_k > 2n$. Se observă că numerele $1 + l_1, 1 + l_2, ..., 2n + l_{2n}$

dau resturi diferite la împărțirea cu $2n$, altfel două persoane ar ocupa după pauză același scaun. Atunci numerele $(1+l_1)+(2+l_2)+...+(2n+l_{2n}) = (1+2+...+2n)+$ $+(l_1+l_2+...+l_{2n}) = n(2n+1)+n(2n-1) = 4n^2$ și $0+1+...+(2n-1) = n(2n-1) = 2n^2-n$ au același rest la împărțirea cu $2n$, ceea ce reprezintă o contradicție.

2. TABLA DE ȘAH (și nu numai ...)

27. Nu. Ar fi necesare $1+2+3+...+9 = 45$ mutări "uzuale" de pioni. Cum acestea trebuie efectuate în perechi și numărul 45 este impar, răspunsul este justificat.

28. a) Două culori ajung; tabla șah este modelul cerut. Este evident că o culoare nu satisface cerința.

b) Cu 4 culori reușim o astfel de colorare:

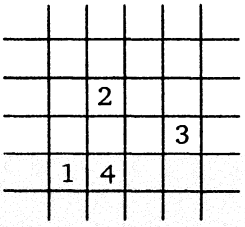
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2

Pentru a arăta că 4 este numărul minim, să considerăm un pătrat de latură 2:

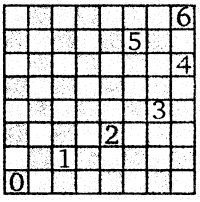
Oricare 2 câmpuri din cele 4 au cel puțin un vârf comun, deci sunt necesare cel puțin 4 culori, ceea ce trebuia demonstrat.

29. Un astfel de dreptunghi este unic determinat de două linii orizontale – din cele n - și de două verticale – din cele m. Putem alege 2 linii orizontale în $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ moduri și 2 verticale în $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ moduri; prin urmare numărul de dreptunghiuri este $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2}$.

30. Urmărind succesiunea de mutări din figură, observăm că un cal (plasat inițial în căsuța notată 1) poate fi mutat într-o într-o căsuță vecină (notată 4). Din aproape în aproape, observăm că un cal poate fi deplasat în orice alt câmp al tablei de șah.



31. Numărul minim de mutări necesare este 6, o secvență posibilă de mutări fiind indicată în figură.

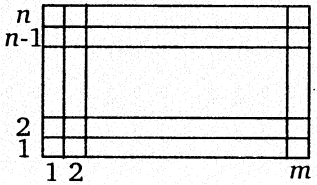


Observând că un cal își schimbă la fiecare mutare culoarea câmpului și că două colțuri opuse sunt la fel colorate, deducem că numărul de mutări este par, deci nu poate fi 5. Rămâne de constatat că 4 mutări nu sunt suficiente. Într-adevăr, deplasarea pe orizontală (respectiv pe verticală) dată de o mutare a calului este de 2 câmpuri (respectiv 1 câmp) sau viceversa, în total 3 câmpuri. Deplasarea între 2 colțuri opuse este de 7 câmpuri pe orizontală și 7 pe verticală; cum $14 = 7+7 > 4 \cdot 3 = 12$, concluzia se impune.

32. Este firesc să alegem - pentru eliminare - acele 10 linii care au cât mai multe pătrate marcate. Observăm că astfel rămân cel mult 10 pătrate marcate; într-adevăr, dacă ar rămâne mai mult de 11, atunci una din liniile rămase ar avea măcar 2 pătrate marcate. Deoarece am eliminat cel mult $30-11=19$ pătrate marcate, una din liniile eliminate are cel mult un pătrat marcat, ceea ce contrazice eliminarea liniilor cu cât mai multe pătrate marcate. Cele (cel mult) 10 pătrate marcate rămase după eliminarea celor 10 linii se află situate pe cel mult 10 coloane; eliminându-le pe acestea, problema este rezolvată.

Dorel Miheț

33. Notăm cu $l_1, l_2, ..., l_n$ numărul -1 care apar pe liniile 1, 2, ..., n și cu $c_1, c_2, ..., c_m$ numărul de -1 de pe coloanele 1, 2, ..., m; atunci



$$l_1 + l_2 + ... + l_n = c_1 + c_2 + ... + c_m. \qquad (1)$$

Conform ipotezei, avem

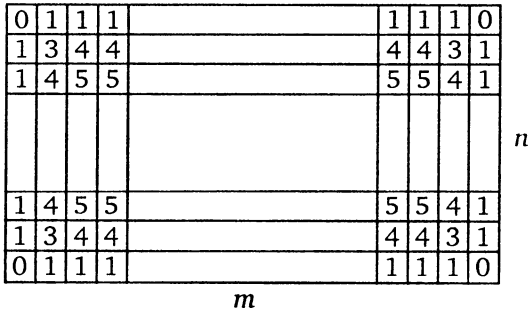
$(-1)^{l_1} = (-1)^{l_2} = ... = (-1)^{l_n} = (-1)^{c_1} = (-1)^{c_2} = ... =$

$= (-1)^{c_m} = -1$, adică numerele $l_1, l_2, ..., l_n, c_1, c_2, ..., c_m$ sunt impare. Rezultă că egalitatea (1) are loc dacă și numai dacă numerele m și n au aceeași paritate, adică $m+n$ este par.

34. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, să presupunem că $a=b$; atunci $a=b=7$. Notăm cu S suma tuturor numerelor din tabla considerată și cu $l_1, l_2, ..., l_7$; $c_1, c_2, ..., c_7$ suma elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană. Atunci $2S = l_1 + l_2 + ... + l_7 + c_1 + c_2 + ... + c_7$. Cum exact 7 din cei 14 termeni din membrul drept sunt numere impare rezultă că $2S$ este număr impar, ceea ce reprezintă o contradicție.

35. Dacă pătratul dat este unul din cele 4 colțuri ale tablei, atunci nu putem plasa nici o cruciuliță care să acopere colțul. Dacă pătratul este pe marginea mesei – dar nu e unul din colțuri, atunci putem să îl acoperim cu o cruciuliță.

Pentru ușurința redactării, vom considera că eliminăm din tabla dată benzile de lățime 1 de pe margini; rămâne o tablă de dimensiuni $(m-2)\times(n-2)$. Cele 4 colțuri se pot acoperi cu 3 cruciulițe iar pătratele de pe margini cu 4. Oricare alt pătrat se poate acoperi cu 5 cruciulițe.

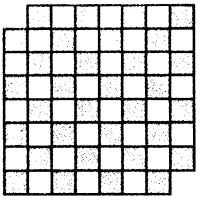


36. Răspunsul este negativ. Cele 18 sume (8 corespunzând liniilor, 8 coloanelor și 2 diagonalelor) sunt în mulțimea cu 17 elemente $\{-8,-7,...,-1,0,1,...,7,8\}$; conform principiului cutiei, cel puțin două dintre acestea sunt egale.

37. Fiecare alegere a unui pătrat 2×2 mărește suma tuturor numerelor cu 4; prin urmare, suma trebuie să fie un multiplu de 4. Prima tablă nu verifică această condiție, deci nu o putem obține.

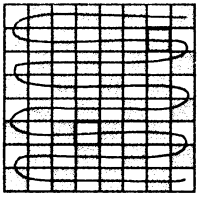
În al doilea caz, să observăm că ori de câte ori alegem un colț al tablei, pătratul 2×2 ce conține acest colț conține și centrul tablei. În consecință, numărul din centru va fi în fiecare moment egal cu suma numerelor din cele 4 colțuri. Cum $24 \neq 4+6+6+6$, nici a doua configurație nu e realizabilă.

38. Este foarte util să păstrăm colorarea celor 64 de pătrate ale tablei cu alb și negru. Înainte de a elimina colțurile opuse (care au aceeași culoare !) avem 32 de pătrate albe și 32 de pătrate negre (vezi fig.). Scoțând cele 2 pătrate – să zicem de culoare albă – rămânem cu un număr de 30 pătrate albe și 32 de pătrate negre.



Un dreptunghi ▭ de dimensiuni 2×1 acoperă exact un pătrat alb și un pătrat negru, indiferent cum s-ar plasa acesta pe tablă. Astfel, folosind 30 de dreptunghiuri – fără suprapuneri – am acoperi toate cele 30 de pătrate albe și doar 30 de pătrate negre; cele 2 pătrate negre rămase nu pot fi acoperite cu un dreptunghi, ceea ce încheie demonstrația.

39. Construim un drum de 64 de pătrate care să pornească dintr-un colț negru, să treacă mai întâi prin pătratul negru, apoi prin cel alb și să se încheie într-un colț alb.



Drumul este secționat în cel mult 3 sub-drumuri de cele 2 pătrate eliminate. Oricare sub-drum începe cu un pătrat negru și se încheie cu unul alb; prin urmare are un număr *par* de pătrate. Atunci el poate fi acoperit cu dominouri (dreptunghiuri 2×1), ceea ce trebuia demonstrat.

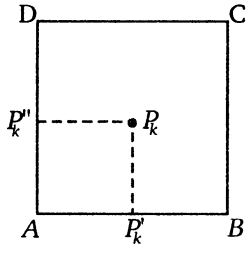
40. Numerotăm pătratele ca în figură:

1	2	2	3	3	4	4				50	50	51
2	1	3	2	4	3		4		50		51	50
2	1	3	2	4	3		4		50		51	50
1	2	2	3	3	4	4		...		50	50	51

Exceptând numerele 1 și 51(care apar de 4 ori), fiecare din numerele de la 2 la 50 apare de 8 ori; altfel spus centrele pătratelor numerotate la fel formează 49 de octogoane și 2 "jumătăți". Se observă cu ușurință că centrele pătratelor numerotate la fel sunt conciclice. Deoarece $154 = 51\cdot3+1$, conform principiului cutiei rezultă că există patru centre ale unor pătrate hașurate și numerotate la fel (cu unul din numerele de la 1 la 51). Conform observației de mai sus, acestea sunt puncte conciclice și demonstrația este încheiată.

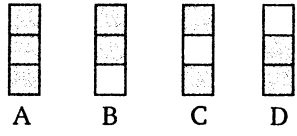
41. Primul rupe o fâșie 6×1 astfel ca bucata 6×8 rămasă să admită un *centru de simetrie*. De aici încolo el repetă mișcările celui de-al doilea prin simetrie față de centru. În final el rămâne cu avantajul a 6 pătrățele de ciocolată.

42. Fie *ABCD* pătratul considerat și l latura sa. Notăm $P_1, P_2, ..., P_m$ punctele interioare pătratului și P_1', P_2', ..., P_m', respectiv P_1'', P_2'', ..., P_m'' proiecțiile acestora pe *AB*, respectiv *AD*. Fie $x_k = \frac{AP_k'}{l}$ și $y_k = \frac{AP_k''}{l}$, $k \in \{1,2,...,m\}$. Problema revine la a demonstra că există un număr n natural astfel încât $x_k, y_k \notin \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right\}$, oricare ar fi $k \in \{1,2,...,m\}$. Dacă x_k și y_k este un număr irațional, afirmația este evidentă. În caz contrar, alegem n un număr prim care nu se află în descompunerea în factori primi a numitorilor fracțiilor raționale (ireductibile) x_k și y_k, ceea ce încheie demonstrația.



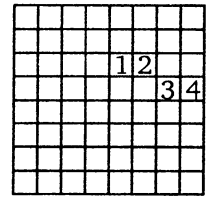
43. Să alegem alb și negru pentru cele două culori și numim coloană *albă* o coloană cu cel puțin două pătrate albe și coloană *neagră* o coloană cu cel puțin două pătrate negre.

Numărul de coloane fiind 7, există 4 de aceeași culoare; fie aceasta negru. Coloanele negre pot fi:

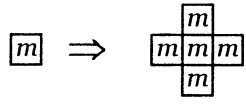


Dacă există două coloane negre de același tip (*A*, *B*, *C*, *D*) atunci problema este rezolvată. În caz contrar, avem o coloană din fiecare tip. "Ștergând" culoarea neagră unui pătrat al coloanei de tip *A*, obținem două coloane de același tip, ca mai sus, și concluzia este evidentă.

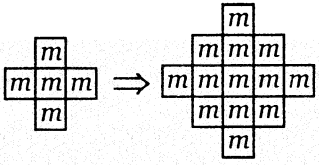
44. Să împărțim tabla în 32 de dreptunghiuri de dimensiuni 2×1 și notăm cu 1 poziția inițială a regelui – vezi figura pentru un exemplu. Primul jucător mută regele în poziția neocupată din dreptunghiul 2×1 care conține regele – în figură pătratul e notat cu 2. Al doilea jucător va muta regele *în mod necesar* într-un alt dreptunghi iar apoi primul jucător va "completa" dreptunghiul - adică va muta în poziția neocupată din dreptunghi – vezi de exemplu în figură pozițiile 3, respectiv 4. Continuând astfel, primul jucător va avea întotdeauna asigurată poziția liberă a dreptunghiului în care "intră" prima dată regele. Prin urmare primul are strategia câștigătoare.



45. Fie m cel mai mic număr natural care este scris într-un câmp. Deoarece m este media aritmetică a 4 numere mai mari sau egale cu m, rezultă că în câmpurile vecine este scris același număr m.



Repetând raționamentul pentru cele 4 câmpuri vecine celui inițial, obținem 8 alte câmpuri în care este scris tot numărul m.



Repetând de n ori acest raționament, observăm că dacă un câmp este la o "distanță" mai mică de n pătrate față de cel inițial (adică există un drum format cu cel mult n căsuțe vecine între cele 2 câmpuri), atunci în acest câmp este situat numărul m. Cum n este un număr oarecare, concluzia rezultă cu ușurință.

46. Numerotăm cele 16 pătrate ale tablei cu 0, 1 și 2 ca în figură și observăm că sunt 6 de 0, 5 de 1 și tot 5 de 2. Un dreptunghi 3×1 acoperă (în orice poziție) trei pătrate numerotate cu 0, 1 și 2; prin urmare pătratul unitate din acoperirea noastră este într-unul din câmpurile notate cu 0, adică într-unul din cele 2 colțuri sau pe diagonală.

0	2	1	0
1	0	2	1
2	1	0	2
0	2	1	0

Renumerotăm pătratele astfel ca pătratele celeilalte diagonale să fie numerotate cu 0:

0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2
0	1	2	0

Un raționament analog arată că pătratul unitate este notat cu 0. Privind cele 2 figuri, concluzia este imediată.

47. Numărul maxim este 32. Într-adevăr, să plasăm cei 32 de cai pe cele 32 de câmpuri albe ale tablei. Cum orice cal atacă doar câmpuri de culoare neagră, rezultă că aceștia nu atacă.

Vom arăta că nu putem plasa 33 de cai fără să se atace. Numerotăm câmpurile de la 1 la 64 urmând traseul unui cal ce trece prin toate câmpurile fără să revină pe un câmp ocupat anterior (acest lucru e posibil; încercați !). Dacă am plasa acum 33 de cai, vom avea două câmpuri numerotate consecutiv ce vor fi ocupate de doi cai. Aceștia se atacă și soluția este completă. Pentru o altă justificare, împărțiți tabla în 8 dreptunghiuri 2×4 și observați că nu se pot plasa 5 cai într-un dreptunghi fără să se atace.

48. Numim drum între două pătrate o succesiune de pătrate vecine (cu o latură comună) ce unește cele două pătrate considerate. Cel mai lung drum se găsește între 2 colțuri opuse ale tablei și are 15 pătrate.

Să considerăm un drum între pătratele ce conțin numerele 1 și 64; acesta are cel mult 15 pătrate. Dacă diferența numerelor din 2 pătrate vecine ale acestui drum este

cel mult egală cu 4, atunci diferența dintre 1 și 64 nu ar putea depăși $4 \cdot (15-1) = 4 \cdot 14 = 56$; contradicție.

49. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, suprapunând ca în figura 1 două tetrisuri, rezultă că diferența numerelor corespunzătoare pătratelor hașurate se divide cu 9.

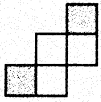


fig.1

În consecință, cele 5 pătrate hașurate din figura 2 conțin numere ce dau același rest la împărțirea cu 9.

Acest lucru nu este realizabil, întrucât în mulțimea 1, 2, 3, ..., 35, 36 există doar 4 numere ce au același rest r la împărțirea cu 9.

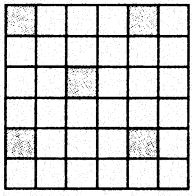


fig.2

50. i) Considerați modelul tablei de șah. Prin permutări ale liniilor și coloanelor se pot obține și alte exemple.

ii) Numerotăm liniile de la 1 la 8 de sus în jos, respectiv de la stânga la dreapta. Dacă pe linia i sunt hașurate pătratele de pe coloanele $1 \le a < b < c < d \le 8$, numerele scrise în aceste pătrate sunt $a+(i-1)8, b+(i-1)8, c+(i-1)8$ și $d+(i-1)8$ iar suma lor este $S_i = (a+b+c+d)+32(i-1)$. Adunând sumele S_i, $i = \overline{1,8}$ și ținând cont că orice coloană – de exemplu a – apare exact în 4 din sumele S_i, rezultă că suma tuturor numerelor din pătratele hașurate este $4(1+2+3+...+8)+32(0+1+2+...+7) =$ $= 4 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 32 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 1040$. Deoarece $1+2+3+...+64 = \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080$, concluzia rezultă cu ușurință.

51. Răspunsul este negativ. Să observăm că perimetrul figurilor hașurate este inițial cel mult egal cu $28 = 7 \times 4$. Cu fiecare hașurare a unui pătrat unitate, perimetrul

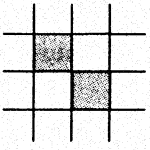


Figura 1

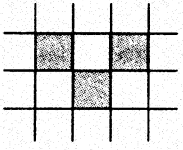


Figura 2

figurii hașurate nu se mărește; el rămâne constant (vezi fig. 1) sau scade (vezi fig 2): Dacă în final s-ar putea hașura toate cele 64 de pătrate, perimetrul figurii hașurate ar fi egal cu 32; contradicție.

52. a) Da; colorăm de exemplu cele 100 de pătrate aflate pe o diagonală. Fiecare va avea 0 pătrate vecine colorate, deci un număr par.

b) Nu. Să presupunem contrariul și să notăm cu a numărul pătratelor colorate având un pătrat vecin colorat și cu b numărul pătratelor colorate ce au trei pătrate vecine colorate; avem $a+b$ impar.

Fie N numărul laturilor comune a două pătrate vecine colorate. Atunci

$$2N = a + 3b = (a+b) + 2b,$$

deci $a+b = 2(N-b)$ este un număr par; contradicție.

53. Vom arăta că numărul căutat este 2500. Pentru aceasta, numerotăm liniile și coloanele de la 1 la 100 – vezi figura 1 - și asociem fiecărui copac perechea de numere (i, j) corespunzând liniei i și coloanei j pe care se află copacul.

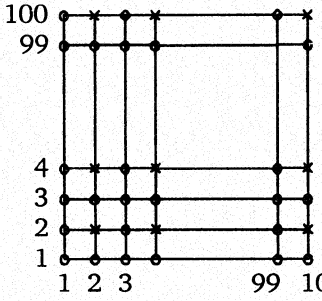


fig.1

Să arătăm mai întâi că putem tăia cel mult 2500 de copaci, respectând cerința problemei. Împărțim copacii în 2500 de "pătrate" ca în figura 2, cei 4 copaci având vârfurile $(2j-1;2j-1)$, $(2j-1,2j)$, $(2j,2j-1)$ și $(2j,2j)$, $j\in\{1,2,...,50\}$. Oricare 2 copaci ai unui "pătrat" sunt vizibili reciproc deci nu putem tăia decât cel mult unul; prin urmare putem tăia cel mult 2500 de copaci.

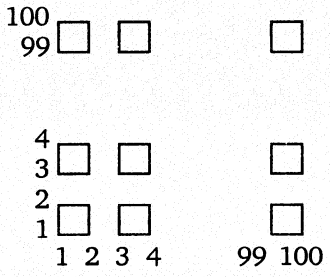
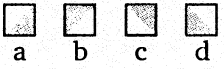


fig.2

Vom arăta că putem tăia 2500 de copaci; într-adevăr, fie aceștia cei cu ambele coordonate pare (fig. 1). Trebuie să arătăm că 2 astfel de puncte nu sunt vizibile; fie $A(2a,\ 2b)$ și $B(2c,\ 2d)$. În mijlocul segmentului AB este copacul $C(a+c,b+d)$. Dacă una din coordonatele $a+c$ sau $b+d$ este impară, atunci copacul din punctul C nu este tăiat și deci punctele A și B nu sunt vizibile. Dacă $a+c$ și $b+d$ sunt pare, atunci înlocuim punctele A și B cu A și C și reluăm raționamentul. Prin urmare soluția se încheie.

54. Împărțim pătratul de latură 8 în 64 de pătrate unitate. Un pătrat unitate se poate acoperi în 4 moduri:



Cele 8 pătrate ale unei diagonale pot fi acoperite în $4^8 = 2^{16}$ moduri. În rest, acoperirea este unic determinată. Într-adevăr, să considerăm două pătrate ale diagonalei având un vârf comun; de exemplu

Ipoteza atrage următoarea acoperire (unică !) a pătratelor vecine amândurora:

În mod analog se probează unicitatea pentru orice altă combinație.

Astfel, acoperirea a 8 pătrate ale unei diagonale implică acoperirea diagonalelor adiacente ei (cu câte 7 pătrate fiecare) în mod unic; apoi acoperirea diagonalelor de câte 6 pătrate ș.a.m.d.

55. Pentru fiecare $k \in \{0,1,2,3,4\}$ notăm cu S_k numărul pătratelor unitate având exact k laturi cu capetele la fel colorate. Avem de demonstrat că S_1 este număr par. Să observăm că $S_3 = 0$, deoarece dacă 3 laturi ale unui pătrat au capetele de aceeași culoare, atunci 4 au capetele de aceeași culoare. Pentru fiecare pereche de vârfuri adiacente de aceeași culoare vom scrie numărul 1 în interiorul pătratelor unitate de care aceste vârfuri aparțin. Astfel, fiecare pereche monocromatică de pe contur va avea asociat un număr 1, iar fiecărei perechi monocromatice i se vor asocia două numere 1. Cum numărul perechilor monocromatice de pe contur este $2m+2n$ rezultă că suma numerelor din interiorul pătratelor tablei este număr par. Pe de altă parte, în interiorul unui pătrat unitate cu exact k laturi având extremitățile de aceeași culoare se scriu k de 1; prin urmare suma numerelor din interiorul pătratelor tablei este $O \cdot S_0 + 1 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + 3 \cdot S_3 + 4 \cdot S_4 = S_1 + 2S_2 + 4S_4$. Cum acest număr este par rezultă că S_1 e par, ceea ce trebuia demonstrat.

3. PROBLEME CU NUMERE

56. Grupând numerele două câte două 1,2; 3,4; ...; 99, 100 obținem 50 de grupe. Atunci oricum am alege 51 de numere vom găsi două consecutive, deci și prime între ele.

57. Presupunând contrariul, fiecare din cele 10 cifre se va repeta de exact 3 ori. Suma cifrelor va fi $3(0+1+2+...+9)$, adică 3 divide 2^n; contradicție.

58. Resturile la împărțirea cu 7 ale celor 100 de numere sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6; prin urmare există cel puțin $\left[\frac{100}{7}\right]+1=15$ numere cu același rest la împărțirea cu 7. Rămâne doar de observat că diferența a două numere cu același rest la împărțirea cu 7 este un număr divizibil cu 7.

59. Soluția 1. Avem $n = 2k+1$ factori în produsul considerat, dintre care $k + 1$ au scăzătorul impar 1, 3, 5, ..., $n = 2k + 1$. Tot $k + 1$ paranteze au descăzutul impar, deoarece $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt tot numerele 1, 2, ..., n, eventual în altă ordine. În total avem $2(k+1) = n+1$ termeni impari în cele n paranteze; înseamnă că într-o paranteză ambii termeni sunt impari și deci factorul este par și odată cu el tot produsul.

Soluția 2. Numărul factorilor este impar și suma lor este $a_1 + a_2 + ... + a_n - (1+2+...+n) = 0$; prin urmare unul din factori este număr par. Concluzia este evidentă.

60. În mulțimea M sunt 1000 de pătrate perfecte:

$$1^2, 2^2, 3^2, ..., 1000^2 = 1000000$$

și 100 de cuburi perfecte:

$$1^3, 2^3, 3^3, ..., 100^3 = 1000000.$$

Prin urmare, mulțimea A are cel mult $1000 \cdot 100 = 100000$ de numere, deci $M \setminus A$ este mai numeroasă.

61. Ordonăm numerele astfel

99, 1, 98, 2, 97, 3, ..., 51, 49, 50.

Se observă că suma a două numere consecutive din această secvență este 99 sau 100, deci nu putem alege printre cele 50 două numere consecutive. Grupând numerele 2 câte 2, exceptând ultimul număr, adică 50, obținem 50 de grupe. Prin urmare din fiecare grupă trebuie ales exact unul. Începând cu ultima grupă este evident că trebuie ales numărul 50. Din penultima trebuie ales 51, apoi din penultima – {52, 48} – alegem 52, ș.a.m.d. În concluzie, numerele alese sunt 50, 51, ..., 99.

62. Vom împărți numerele 1, 2, 3, 4, ..., 49, 50 în submulțimile

$A_0 = \{7,14,21,28,35,42,49\}$;

$A_1 = \{1,8,15,22,29,36,43,50\}$;

$A_2 = \{2,9,16,23,30,37,44\}$;

$A_3 = \{3,10,17,24,31,38,45\}$;

$A_4 = \{4,11,18,25,32,39,46\}$;

$A_5 = \{5,12,19,26,33,40,47\}$;

$A_6 = \{6,13,20,27,34,41,48\}$.

Să observăm că mulțimea A_i conține numerele care la împărțirea cu 7 dau restul i. Este clar că nu putem alege două numere din mulțimea A_0 și de asemenea nu putem alege concomitent un element din mulțimea A_i și unul din A_{7-i}, $i \in \{1, 2, 3\}$. Deoarece mulțimile A_i au 7 elemente, cu excepția mulțimii A_1 care are 8 elemente vom alege elementele din A_1, A_2, A_3 și un element din A_0, deci $8+7+7+1 = 23$ de numere.

63. Vom folosi identitatea $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$, oricare ar fi $k \geq 1$; altfel spus, suma primelor numere impare consecutive este k^2. Să observăm că în prima grupă avem 1 număr, a doua grupă conține 2 numere, ..., a n-a grupă are n numere. În total sunt $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ numere în toate cele n grupe și $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ numere în primele n – 1 grupe. Suma numerelor din a n-a grupă

este egală cu suma tuturor numerelor din primele n grupe minus suma tuturor numerelor din primele $n-1$ grupe, adică

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=\frac{n^2[(n+1)^2-(n-1)^2]}{4}=\frac{n^2\cdot 4n}{4}=n^3.$$

64. Să observăm că numerele de pe prima linie:

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

sunt egale cu

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5,\ \ldots,\ \text{respectiv.}$$

Deducem că al n-lea număr al primei linii este

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Fie a și b numărul liniei, respectiv coloanei pe care este scris numărul 2002. Deoarece

$$\frac{62\cdot 63}{2}=1953<2002<\frac{63\cdot 64}{2}=2016,$$

rezultă că $a+b=64$. În plus, $b=2016-2002+1=15$ și deci $a=64-15=49$.

65. Conform enunțului,

$$x_i+y_i=9 \text{ pentru fiecare } i=\overline{1,9}.$$

Numărul de partide jucate este $\frac{9\cdot 10}{2}=45$ și cum fiecare are un învingător și un învins, rezultă $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=y_1+y_2+\ldots+y_{10}$. Atunci

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2)-(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{10}^2)=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\ldots+(x_{10}^2-y_{10}^2)=$$
$$=(x_1-y_1)(x_1+y_1)+(x_2-y_2)(x_2+y_2)+\ldots+(x_{10}-y_{10})(x_{10}+y_{10})=$$
$$=9(x_1-y_1)+9(x_2-y_2)+\ldots+9(x_{10}-y_{10})=0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

66. Alegem numerele 1, 4, 7, 10, ..., 2002, adică cele de forma $\mathfrak{M}3+1$. Se obțin 668 de numere și arătăm că acestea satisfac cerința. Într-adevăr, suma oricăror două este de forma $\mathfrak{M}3+2$ iar diferența $\mathfrak{M}3$, deci diferența nu divide suma.

Vom arăta că numărul 668 este maxim. Într-adevăr, dacă alegem cel puțin 669 de numere vom găsi două numere alese dintr-una din cele 667 de grupe formate astfel:

$$\{1, 2, 3\};\ \{4, 5, 6\};\ \ldots;\ \{1999, 2000, 2001\}.$$

Dacă numerele alese sunt consecutive, atunci diferența lor este 1 și divide suma lor. Dacă numerele alese au diferența 2, atunci numerele au aceeași paritate și suma lor se divide cu 2, deci cu diferența lor. Cu aceasta demonstrația se încheie.

67. Răspunsul este negativ în primul caz. Să observăm că suma numerelor

$$1+2+3+\ldots+100=50\cdot 101=5050 \text{ este pară.}$$

Dacă numerele alese inițial sunt a și b, $a<b$, în locul acestora se scrie numărul $b-a$. Deoarece numerele $b+a$ și $b-a$ au aceeași paritate, rezultă că la fiecare pas paritatea

sumei numerelor de pe tablă nu se modifică. În consecință, ultimul număr va fi par, deci nu poate fi 1.

În al doilea caz răspunsul este afirmativ. Împărțim numerele în grupe astfel: {1}, {2, 3}, {4, 5}, ..., {100, 101}. Fiecare din cele 50 de grupe de 2 numere se vor șterge, iar în locul lor se vor scrie 50 de numere egale cu 1; în total 51. Luând două câte două aceste unitați, după 25 de paşi rămân 25 de 0 și un 1. Continuarea este imediată.

68. Să considerăm diferențele

$$a_{20}-a_{19},\ a_{19}-a_{18},\ldots,a_3-a_2,a_2-a_1\ ;\ \text{sunt 19 diferențe.}$$

Dacă cel mult două dintre acestea sunt egale, atunci

$$(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\ldots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)\geq 1+1+2+2+\ldots+9+9+10=100\,.$$

Pe de altă parte, $(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\ldots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=a_{20}-a_1<a_{20}\leq 100$, contradicție.

69. Considerăm numerele

$$a_1,a_2,\ldots,a_k,\ a_2-a_1,\ a_3-a_1,\ldots,a_k-a_1\,.$$

Avem $k+(k-1)=2k-1>n$ numere naturale mai mici sau egale cu n, deci cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.

Deoarece numerele $a_1,a_2,\ldots,a_k$ sunt distincte și $a_2-a_1,a_3-a_1,\ldots,a_k-a_1$ sunt distincte, rezultă că există i, j astfel ca $a_i=a_j-a_1$, adică

$$a_1+a_i=a_j\,.$$

70. Aranjăm numerele în tabloul următor

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Să observăm că dacă alegem două numere a, b plasate pe diagonalele tabloului (de exemplu 1 și 10) atunci există două numere c, d ce nu sunt plasate de diagonale astfel încât $a+b=c+d$ (în cazul exemplului dat, luăm numerele 2 și 9). Alegerea va fi făcută astfel ca numerele a, b, c, d să fie plasate în vârfurile unui dreptunghi sau să fie pe aceeaşi coloană.

Prin urmare cele două grupe sunt

1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 și 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15.

71. Fie $a_1 < a_2 < ... < a_8$ numărul de pietricele din cele 8 grămezi.

Conform ipotezei, cele a_1 pietricele ale primei grămezi sunt suficiente pentru a egaliza celelalte 7 grămezi. Cum $a_8 \geq a_7 + 1$, trebuie să adăugăm cel puțin o pietricică în a 7-a grămadă, apoi cel puțin 2 în a 6-a grămadă ș.a.m.d. Prin urmare

$$a_1 \geq 1+2+3+4+5+6 = 21 \text{ și}$$

$$a_8 \geq a_7 + 1 \geq a_6 + 2 \geq ... \geq a_1 + 7 = 28.$$

Vom arăta că numărul minim de pietricele din a opta grămadă este 28. Într-adevăr, distribuția 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 satisface condițiile problemei – după redistribuirea oricărei grămezi, celelalte 7 vor avea $\frac{21+22+...+28}{7} = \frac{196}{7} = 28$ de pietricele.

72. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ resturile la împărțirea cu 10 000 a termenilor șirului și să observăm că relația $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$ se menține modulo 10 000.

Considerăm perechile (a_k, a_{k+1}), $k = \overline{1,100000001}$; sunt $10^8 + 1$ perechi. Deoarece $a_k, a_{k+1} \in \{0,1,...,9999\}$, rezultă că a_k și a_{k+1} au 10^4 valori posibile, deci există $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ perechi distincte (a_k, a_{k+1}) posibile. Conform principiului lui Dirichlet, există $m < n \in \{1,2,...,10^8 + 1\}$ astfel încât $(a_m, a_{m+1}) = (a_n, a_{n+1})$, adică

$$a_m = a_n \text{ și } a_{m+1} = a_{n+1}.$$

Atunci $a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = a_{m+1} - a_m = a_{m-1}$ și apoi $a_{n-2} = a_{m-2}, ..., a_2 = a_{m-n+1}$ și $a_1 = a_{m-n+1}$. Cum $a_2 = a_1 = 1$, rezultă că $a_{m-n} = a_{m-n+2} - a_{m-n+1} = a_2 - a_1 = 0$, deci termenul de rang $m - n$ din șirul lui Fibonacci se divide cu 10 000.

73. Vom arăta că din numerele a_k și b_k, $k \in \{1,2,...,n\}$, unul este mai mic sau egal cu n iar celălalt mai mare. Utilizăm metoda reducerii la absurd.

Dacă $a_k, b_k \leq n$, atunci toate numerele $a_1, a_2, ..., a_k$ și $b_k, b_{k+1}, ..., b_n$ sunt cel mult egale cu n. În total sunt însă $n + 1$ numere diferite, contradicție.

Dacă $a_k, b_k > n$, atunci toate numerele $b_1, b_2, ..., b_k$ și $a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ sunt mai mari ca n și contradicția se obține analog.

În consecință, fiecare termen $|a_k - b_k|$ al sumei din enunț este diferența dintre un număr mai mare ca n și unul cel mult egal cu n. Altfel spus, în suma dată termenii $n+1, n+2, ..., 2n$ au semnul + iar 1, 2, ..., n au semnul –. Atunci

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = (n+1) + (n+2) + ... + 2n - (1+2+...+n) =$$

$$= \underbrace{n + n + ... + n}_{\text{de } n \text{ ori}} = n^2.$$

74. Sunt $2^{10} - 1 = 1023$ de submulțimi nevide ale mulțimii cu cele 10 numere. Suma elementelor unei submulțimi este evident între 100 și 1000, deci avem cel mult 900 de sume posibile (în fapt mai puține, căci suma maximă este $90 + 91 + ... + 99 = 945$). Există prin urmare două submulțimi având aceeași sumă a

elementelor. Dacă acestea nu sunt disjuncte, eliminăm partea comună și egalitatea se menține.

75. Împărțim numerele 1, 2, 3, ..., $2046 = 2^{11} - 2$ în 10 mulțimi astfel:

$$A_1 = \{1,2,3\};\ A_2 = \{4,5,6,7\},\ A_3 = \{8,9,10,...,15\},...,A_k = \{2^k, 2^k + 1,...,2^{k+1} - 1\},$$

$$k = \overline{2,9},\ ...,A_{10} = \{1024,1025,...,2046\}.$$

Conform principiului cutiei, într-una din cele 10 mulțimi se vor afla 3 din cele 21 de numere; fie $b < a < c$ aceste 3 numere. Dacă ele sunt în prima mulțime, atunci $a = 2, b = 1, c = 3$ și evident $1 \cdot 3 < 2 \cdot 2^2 < 4 \cdot 1 \cdot 3$. Dacă ele se află într-o mulțime A_k, atunci $2^k \le b < a < c < 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \le 2b < 2a$. Observăm că $b < a$ și $c < 2a$, deci $bc < 2a^2$ și $a < c$ și $a < 2b$, deci $2a^2 < 4bc$, ceea ce trebuia demonstrat.

76. Fie A și B cele două grupe, A fiind cea cu trei elemente. Să observăm că dacă într-o grupă avem trei numere consecutive, atunci acestea răspund cerinței, cel din mijloc fiind media aritmetică a vecinilor.

Împărțim cele 9 numere în 3 astfel:

1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9.

Dacă în mulțimea A nu avem câte un element (și numai unul!) din cele 3 grupe de mai sus, atunci în mulțimea B găsim trei numere consecutive și problema este rezolvată; prin urmare A este formată cu câte un element din grupele de mai sus.

Analizăm cazurile:

i) $1 \in A$. Atunci $4 \in A$ – altfel 2, 3, $4 \in B$ - și la fel $7 \in A$. Numerele 1, 4, $7 \in A$ rezolvă problema: $4 = \frac{1+7}{2}$.

ii) $2 \in A$. Atunci 1, $3 \in B$ și dacă $5 \in B$, problema se încheie. Luăm $5 \in A$, deci 1, 3, 4, $6 \in B$. Numărul 8 rezolvă situația: sau 2, 5, $8 \in A$, sau 4, 6, $8 \in B$.

iii) $3 \in A$, deci 1, $2 \in B$.

a) Dacă $4 \in A$, atunci 5, $6 \in B$. Este necesar ca $7 \in A$, altfel 5, 6, $7 \in B$. Rezultă că 2, 5, $8 \in B$ și $5 = \frac{2+8}{2}$.

b) Dacă $5 \in A$, atunci 2, 4, $6 \in B$ și cerința e satisfăcută.

c) Dacă $6 \in A$, atunci 4, $5 \in B$. Numărul 9 rezolvă problema: 3, 6, $9 \in A$ sau 1, 5, $9 \in B$.

77. Să observăm că $(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4mn$. În plus $(m-n)^2 < 4mn$, deoarece $m^2 - 4mn + n^2 < 0$ este echivalentă cu $n/m < 3 + 2\sqrt{2}$, ceea ce rezultă din

$n < 5m$. Atunci $(m-n)^2$ este un număr impar dintre 1 și $4mn$, deci $(m-n)^2-1$ și $4mn-(m-n)^2+1$ sunt pare.

Numerele 1, 2, ..., $4mn$ se vor grupa câte două astfel: primele $(m-n)^2-1$ numere se grupează $(k,(m-n)^2-k)$ și au suma $(m-n)^2$ iar următoarele $4mn-(m-n)^2+1$ se grupează $((m-n)^2+k,\ 4mn-k)$ și au suma $(m+n)^2$.

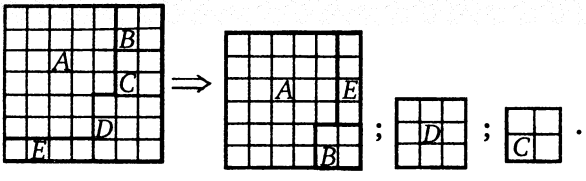
$1, 2, ..., (m-n)^2-2, (m-n)^2-1; (m-n)^2, (m-n)^2+1, ..., 4mn-1, 4mn.$

Dinu Șerbănescu

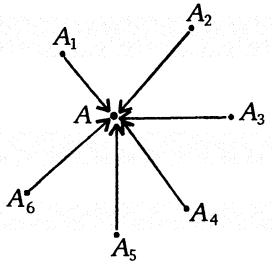
4. COMBINATORICĂ ... GEOMETRICĂ

78. Considerăm fața care are numărul maxim de laturi și notăm cu n acest număr. Evident, orice muchie a poliedrului corespunde unei perechi de fețe; prin urmare poliedrul considerat mai are cel puțin n fețe. Acestea pot avea între 3 și n laturi și problema se rezolvă aplicând principiul cutiei.

79.

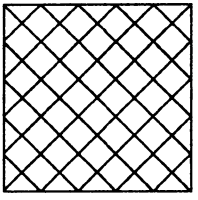


80. Răspunsul este negativ și îl vom justifica folosind metoda reducerii la absurd. Presupunem că în aeroportul din orașul A aterizează (cel puțin) 6 avioane ce au decolat din $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Deoarece avionul din A_1 aterizează în A și nu în A_2 atrage - conform ipotezei inegalitatea $AA_1 < A_1A_2$; în mod analog $AA_2 < A_1A_2$, deci A_1A_2 e cea mai mare latură a triunghiului AA_1A_2.



Obținem că $\widehat{A_1AA_2} > 60^0$ și analog $\widehat{A_2AA_3}$, $\widehat{A_3AA_4}$, $\widehat{A_4AA_5}$, $\widehat{A_5AA_6}$, $\widehat{A_6AA_1} > 60^0$. Atunci suma unghiurilor din jurul unui punct ar fi mai mare ca $6 \cdot 60^0 = 360^0$, contradicție.

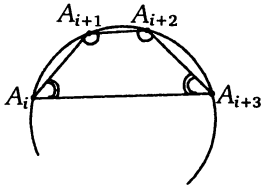
81. Împărțim laturile pătratului în câte 5 segmente de lungime 1/5 și unim punctele de diviziune astfel:



Se obțin 20 de triunghiuri dreptunghice isoscele cu ipotenuza 1/5 și 40 de pătrate cu diagonala 1/5, în total 60 de regiuni. Având 61 de puncte, rezultă că vor exista 2 puncte în interiorul unei regiuni. Triunghiurile și pătratele pot fi acoperite cu discuri de diametru 1/5, prin urmare cele 2 puncte situate în interiorul unei regiuni sunt la o distanță de cel mult 1/5.

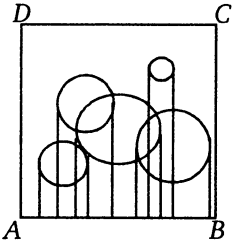
Maria Miheț

82. Notăm cu A_i, $i = \overline{1,2003}$ vârfurile poligonului. Poligonul are două unghiuri consecutive egale; fie acestea A_{i+1} și A_{i+2}. Atunci patrulaterul $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ este inscriptibil și are unghiurile A_{i+1} și A_{i+2} egale. Rezultă că și unghiurile A_i și A_{i+3} (ale patrulaterului) sunt egale, fiind suplementele unghiurilor A_{i+2} și A_{i+1}. Prin urmare $A_iA_{i+3} \parallel A_{i+1}A_{i+2}$ și $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ este un trapez inscriptibil, deci isoscel. În consecință $A_iA_{i+1} = A_{i+2}A_{i+3}$ și poligonul are două laturi egale.



Dinu Șerbănescu

83. Vom considera că afirmația este falsă și proiectăm toate cercurile pe latura AB a pătratului $ABCD$. Fiecare punct al laturii AB aparține cel mult la 3 proiecții ale cercurilor, altfel perpendiculara ridicată din acest punct pe AB ar tăia măcar 4 cercuri. Cum proiecția unui arc pe o dreaptă are lungimea egală cu diametrul acestuia rezultă că suma diametrelor (adică suma proiecțiilor cercurilor) este cel mult egală cu $3 \cdot AB = 3$. Atunci suma lungimii circumferințelor cercurilor este cel mult egală cu $3 \cdot \pi < 10$, contradicție.



Prin urmare există o dreaptă ce taie cel puțin 4 dintre cercurile date.

84. Considerăm o descompunere arbitrară și notăm cu t numărul triunghiurilor acesteia. Suma unghiurilor triunghiurilor este $180^0 \cdot t$, suma unghiurilor în jurul celor m puncte este $360^0 \cdot m$ iar suma unghiurilor poligonului este $180^0 \cdot (n-2)$. Atunci $180^0 \cdot t = 360^0 \cdot m + 180^0(n-2)$, deci $t = 2m + n - 2$ este constant.

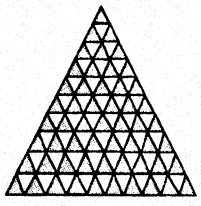
Dan Radu

85. Presupunând contrariul, sferele centrate în aceste puncte și având razele 1/2 au interioare disjuncte și sunt plasate în interiorul cubului de latură 10 determinat de 6 plane paralele la fețele cubului dat și situate în exteriorul acestora la distanța 1/2. Calculând volumele sferelor, rezultă că $1981 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1981 \cdot \frac{\pi}{6}$ ar fi mai mare decât $10^3 = 1000$, ceea ce este o contradicție.

Titu Andreescu

86. Fixăm una din cele n diagonale și o notăm cu d. Celelalte n – 1 diagonale taie – în S – diagonala d; atunci de o parte și de alta a diagonalei d sunt câte n – 1 vârfuri ale poligonului. Rezultă că d este o diagonală "mare", adică diametrul cercului circumscris poligonului regulat.
Repetând raționamentul pentru celelalte diagonale, rezultă că cele n diagonale sunt diametre și deci S este centrul poligonului.

87. Împărțim laturile triunghiului în 10 segmente de lungime 1,5. Paralelele duse din punctele de diviziune la laturile triunghiului inițial împart suprafața sa în $1+3+5+...+19 = 100$ de triunghiuri echilaterale de latură 1,5. Evident, raza cercului circumscris un triunghi echilateral de latură 1,5 este $\sqrt{3}$. Hașurăm – ca în figură – triunghiurile mici direct asemenea cu cel dat; sunt hașurate $1+2+3+...+10 = 55$ triunghiuri.



Vom arăta că discurile circumscrise celor 55 de triunghiuri hașurate acoperă suprafața triunghiului inițial; cu alte cuvinte acoperă și triunghiurile nehașurate. Fie ABC un triunghi nehașurat și P un punct interior acestuia. Cum $\widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPA} = 360^0$, unul din unghiuri este cel puțin 120^0; fie acesta $\widehat{APB}$. Atunci P aparține discului corespunzător triunghiului hașurat de latură AB. Pentru a încheia, să observăm că din cele $111 = 2 \cdot 55 + 1$ puncte, cel puțin 3 se află într-unul din cele 55 de discuri, ceea ce trebuia demonstrat.

88. Vom folosi următorul rezultat: dacă $\widehat{ABC} \geq 90^0$, atunci

$$AC^2 \geq BC^2 + BA^2. \qquad (1)$$

Vom demonstra cerința problemei prin inducție după $n \geq 3$. În cazul $n = 3$, alegerea este forțată și rezultatul se probează imediat. Fie un poligon $A_1A_2...A_n$ cu $n \geq 4$ vârfuri. Cum numărul vârfurilor ascuțite ale unui poligon este cel mult egal cu 3, există un vârf al poligonului – fie de exemplu A_2 - care determină un unghi neascuțit al poligonului – anume $\widehat{A_1A_2A_3}$. Conform lui (1), $A_1A_3^2 \geq A_1A_2^2 + A_2A_3^2$ și deci suma pătratelor lungimilor laturilor poligonului $A_1A_3A_4...A_n$ este mai mare (sau egală) cu suma lungimilor laturilor poligonului $A_1A_2...A_n$. Conform ipotezei de inducție – poligonul $A_1A_3A_4...A_n$ are $n - 1$ laturi ! – există trei vârfuri A_i, A_j, A_k cu $i < j < k \in \{1,3,4,...,n\}$ astfel încât

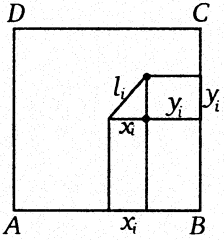
$$A_iA_j^2 + A_jA_k^2 + A_kA_i^2 \geq A_1A_3^2 + A_3A_4^2 + ... + A_nA_1^2 \geq$$

$$\geq A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + ... + A_nA_1^2,$$

ceea ce incheie soluția.

Dinu Șerbănescu

89. Fie $l_1, l_2, ..., l_n$ segmente ce formează linia poligonală dată. Dacă există printre acestea unul paralel cu o latură a pătratului atunci dreapta ce îl conține satisface cerința problemei – avem o infinitate de puncte de intersecție. În caz contrar, fie $x_1, x_2, ..., x_n$ proiecțiile segmentelor $l_1, l_2, ..., l_n$ pe latura AB și $y_1, y_2, ..., y_n$ proiecțiile segmentelor pe latura BC.



Atunci $x_1 + y_1 > l_1$, $x_2 + y_2 > l_2, ..., x_n + y_n > l_n$ - conform inegalității triunghiului (vezi figura) - și prin sumare avem $(x_1 + x_2 + ... + x_n) + (y_1 + y_2 + ... + y_n) > l_1 + l_2 + ... + l_n \geq 1000$. Rezultă că una din sumele $x_1 + x_2 + ... + x_n$ sau $y_1 + y_2 + ... + y_n$ este mai mare strict decât 500. Fără a restrânge generalitatea, alegem $x_1 + x_2 + ... + x_n > 500$; există atunci un punct al segmentului AB - de lungime 1! – care aparține la cel puțin 501 proiecții. Atunci perpendiculara ridicată pe AB din acest punct taie linia poligonală în cel puțin 501 puncte, ceea ce trebuia demonstrat.

90. Presupunem prin absurd contrariul. Atunci, numerotând poligoanele interioare, să observăm că aria reuniunii primelor două este $> 1 + \frac{8}{9}$, aria reuniunii primelor trei este $> 1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9}$, ș.a.m.d. În final rezultă că aria acoperită de cele 9 poligoane este cel puțin $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + ... + \frac{1}{9} = \frac{45}{9} = 5$; contradicție.

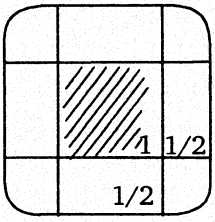
91. Locul geometric al punctelor aflate la o distanță de cel mult 1/2 de laturile unui pătrat de latură 1 este figurat alături; el este compus din pătratul unitate la care se adaugă 4 dreptunghiuri de dimensiuni $1\times 1/2$ și patru sferturi de cerc de rază 1/2.

Aria acestei figuri este

$$1+4\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\frac{1}{4}=3+\pi/4,$$

iar suprafața acoperită de cele 120 figuri asociate celor 120 de pătrate este

$$120\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\cdot\pi.$$



Să considerăm dreptunghiului de dimesiuni 24×19 determinat de paralelele la laturile dreptunghiului inițial situate în interiorul acestuia și la distanța 1/2 de acestea. Aria acestui dreptunghi este

$$24\cdot 19=456>360+96=360+30\cdot 3{,}2>360+30\cdot\pi,$$

adică mai mare decât aria suprafeței ocupate de cele 120 de figuri.

Există deci un punct al dreptunghiului 24×19 neacoperit de nici una din figuri. Discul de diametru 1 centrat în acest punct aparține suprafeței rămase, ceea ce trebuia demonstrat.

92. Considerăm că dreapta este axa reală și notăm $S_k=[a_k,b_k]$, $k=\overline{1,50}$ cele 50 de segmente astfel încât $b_1\le b_k$, oricare ar fi $k=\overline{1,50}$.

Dacă există cel puțin 8 numere a_k, $k=\overline{1,50}$ astfel încât $a_k\le b_1$, atunci b_1 aparține celor 8 segmente cu capetele din stânga în aceste numere a_k și problema este rezolvată. În caz contrar există cel mult 7 astfel de numere a_k; înlăturând segmentele corespunzătoare rămânem cu cel puțin $43=50-7$ segmente disjuncte de $[a_1,b_1]$.

Din aceste cel puțin 43 de segmente îl alegem pe cel cu capătul din dreapta mai mic; fie acesta $[a_2,b_2]$. Problema se încheie analog dacă există 8 numere a_k mai mici sau egale cu b_2; prin urmare presupunem contrariul și obținem cel puțin $36=50-2\cdot 7$ segmente disjuncte de $[a_2,b_2]$ și $[a_1,b_1]$. Repetând acest raționament, după 7 pași găsim **sau** 8 segmente ce au un punct comun **sau** 8 segmente: $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,$ $[a_7,b_7]$ și cel puțin încă $50-7\cdot 7=1$ segment $[a_8,b_8]$, disjuncte două câte două. Cu aceasta problema este încheiată.

93. După primul pas, suprafața hașurată are aria $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$. După al doilea pas se obțin 8 noi pătrate de latură $\frac{1}{9}$, suprafața hașurată crescând astfel cu $\frac{8}{9^2}$. După al

treilea pas se adaugă $8^2=64$ de noi pătrate de latură $\frac{1}{27}$, iar aria hașurată este $\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}$. Continuând procedeul, după 1000 de pași aria hașurată este

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}+\ldots+\frac{8^{999}}{9^{1000}}=\frac{1}{9}\left(1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^{999}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{1000}}{1-\frac{8}{9}}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{1000}.$$

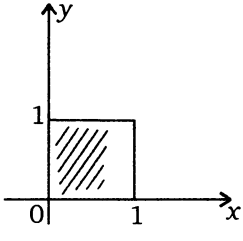
Rămâne de arătat că $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{1000}>0{,}999$, adică $\left(\frac{9}{8}\right)^{1000}>1000$. Într-adevăr, avem

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{1000}=\left(\frac{81}{64}\right)^{500}>\left(\frac{5}{4}\right)^{500}=\left(\frac{25}{16}\right)^{250}>\left(\frac{3}{2}\right)^{250}=\left(\frac{9}{4}\right)^{125}>2^{125}>2^{10}>1000,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Costel Chiteș, Cristinel Mortici

94. Pentru un număr real notăm cu $\{x\}$ partea fracționară a sa. Asociem fiecărui punct $P(a,b)$ punctul $P'(\{a\},\{b\})$ aparținând pătratului unitate $[0,1)\times[0,1)$. Această asociere duce suprafața S într-o mulțime S' inclusă în pătratul de arie 1 din figură. Deoarece aria lui S este mai mare ca 1, rezultă că există două puncte $P(a,b)$ și $Q(c,d)$ din S astfel încât $P'=Q'$, adică $\{a\}=\{c\}$ și $\{b\}=\{d\}$. Obținem $a-c\in\mathbb{Z}$ și $b-d\in\mathbb{Z}$, ceea ce trebuia demonstrat.



95. Împărțim intervalul [0, 1] în 5 intervale egale de lungime $\frac{1}{5}$; fie AB unul dintre acestea și M mijlocul său. Fie S' submulțimea lui S situată în intervalul AM.

Translatând punctele mulțimii S' cu vectorul $\overrightarrow{MB}$ - adică cu $\frac{1}{10}$ în sensul semidreptei (AB, obținem o mulțime disjunctă de mulțimea S (conform ipotezei, nu avem puncte ale mulțimii S la distanța 1/10). Astfel, intervalele lui S aflate în AB se pot muta în intervalul MB fără suprapuneri, prin urmare suma lungimilor intervalelor lui S din AB este cel mult 1/10. Repetând raționamentul pentru celelalte 5 intervale, obținem o sumă a lungimilor intervalelor de cel mult $5\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

96. Împărțim pătratul $ABCD$ în 4 pătrate de latură 1/2 (vezi figura). Conform principiului cutiei, 3 din cele 9 puncte se află în intriorul unuia din cele 4 pătrate; fără a restrânge generalitatea, fie acesta $AMOR$. Notăm X, Y, Z cele 3 puncte aflate în interiorul pătratului $AMOR$. Fie X' și Y' intersecțiile dreptei XY cu două dintre laturile pătratului și fie Z' intersecția lui $X'Z$ cu una din laturile pătratului. (vezi, de exemplu, figura 2).

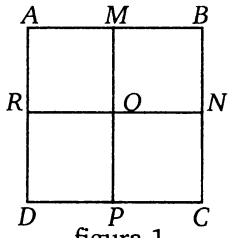


figura 1

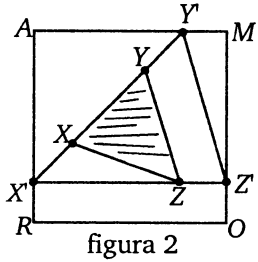


figura 2

Atunci aria$[XYZ] \le$ aria$[X'Y'Z']$.

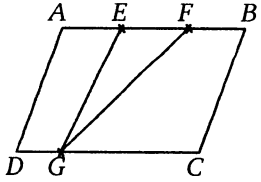
Rămâne de arătat că aria unui triunghi înscris într-un pătrat este cel mult egală cu $\frac{1}{2}$ din aria acestuia. Vom demonstra următorul rezultat mai general:

Lemă. Fie $ABCD$ un paralelogram și E, F, G trei puncte aflate pe laturile peralelogramului. Atunci

$$\text{aria}[EFG] \le \frac{1}{2}\text{aria}[ABCD].$$

Distingem două cazuri:

1) Două din punctele D, E, F se află pe o latură a paralelogramului.



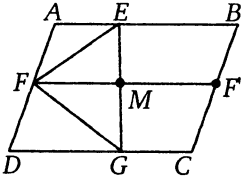
Fie, de exemplu, $E, F \in AB$. Atunci

$$\text{aria}[GEF] = \frac{1}{2}\text{dist}(G, AB) \cdot EF \le \frac{1}{2}\text{dist}(D, AB) \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{2}\text{aria}[ABCD].$$

2) Punctele D, E, F sunt pe laturi diferite ale paralelogramului.

Fie, de exemplu, $E \in AB, F \in AD$ și $G \in DC$ și punctele M și F' obținute din intersecția paralelei din F la AB cu segmentele EG și BC.



Atunci aria$[FEM] \le \frac{1}{2}$aria$[ABF'F]$ și

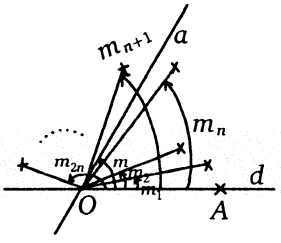
aria$[FMG] \le \frac{1}{2}$aria$[FDCF']$, conform cazului precedent. Prin urmare rezultă

$$\text{aria}[FEG] = \text{aria}[FEM] + \text{aria}[FMG] \le \frac{1}{2}(\text{aria}[ABF'F] + \text{aria}[FDCF'] = \frac{1}{2}\text{aria}[ABCD],$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În concluzie, aria$[XYZ] \le$ aria$[X'Y'Z'] \le \frac{1}{2}$aria$[AMOR] = \frac{1}{8}$ și demonstrația este încheiată.

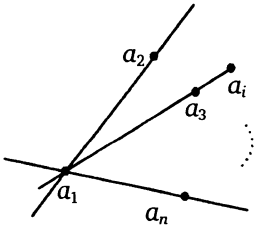
97. Fie d o dreaptă ce lasă toate cele $2n$ puncte de aceeași parte a sa. Notăm $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ cele $2n$ puncte și fie O un punct al dreptei d care nu se află pe nici una din dreptele P_iP_j, $i \neq j \in \{1,2,...,2n\}$. Fie $A \neq O$ un punct al dreptei d și să observăm că unghiurile $\widehat{AOP_i}$, $i \in \{1,2,...,2n\}$ au toate măsuri diferite (în cazul în care $\widehat{AOP_i} = \widehat{AOP_j}$ ar rezulta că $O \in P_iP_j$).



Notăm și ordonăm crescător $m_1 < m_2 < ... < m_{2n}$ măsurile celor $2n$ unghiuri AOP_i. Fie $m \in (m_n, m_{n+1})$ și o dreaptă a ce trece prin O și face cu d un unghi de măsură m. Atunci cele n puncte care determină unghiurile $m_1, ..., m_n$ se află de o parte a dreptei a, iar celelalte n – corespunzătoare unghiurilor de masură $m_{n+1}, ..., m_{2n}$ se află de cealaltă parte, ceea ce trebuia demonstrat.

98. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numerele asociate punctelor $A_1, A_2, ..., A_n$. Notăm cu $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Considerăm toate dreptele ce trec prin punctul A_1 și prin (cel puțin) alt punct al mulțimii de n puncte date; notăm cu k numărul dreptelor. Pentru fiecare dreaptă, suma numerelor asociate punctelor din mulțime ce se găsesc pe această dreaptă este nulă. Adunând aceste k sume, în care numărul a_1 apare de fiecare dată iar celelalte doar o dată, rezultă că



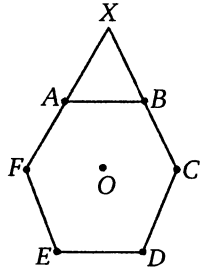
$$ka_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 0$$

deci

$$S = -(k-1)a_1. \qquad (1)$$

Reținem că S și a_1 au semne contrare, deoarece $k \geq 2$ (punctele date nu sunt toate coliniare). Analog obținem că S și $a_2, a_3, ..., a_n$ au semne contrare. Dacă $S > 0$, atunci $a_1, a_2, ..., a_n < 0$ și $S = a_1 + a_2 + ... + a_n < 0$, contradicție. Eliminând analog cazul $S < 0$, rezultă $S = 0$ și din relația (1) obținem $a_1 = 0$, apoi $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$.

99. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O și X intersecția dreptelor AF și BC. Notăm numărul corespunzător unui punct cu litera mică (de exemplu $A(a)$, $B(b)$ etc).



Observăm că ACE și BDF sunt triunghiuri echilaterale cu centrul O, deci

$$a + c + e = b + f + d$$

Triunghiurile XBF și XAC au același cerc înscris – datorită simetriei față de AO - deci

$$x + b + f = x + a + c \text{ sau}$$

$$b + f = a + c.$$

Rezultă că $d = e$. Cum punctele D și E au fost alese arbitrar, problema este rezolvată.

100. Vom face demonstrația prin inducție după L.

Dacă $L = 0$, atunci $p = 1$, $s = 1$ și deci $s + p = L + 2$.

Presupunem teorema adevărată pentru orice hartă cu L frontiere. Fie o hartă care conține $L + 1$ frontiere, p vârfuri și s hărți. Avem de studiat două cazuri:

a) Harta considerată nu conține nici un contur închis. Vom arăta că există cel puțin un vârf aparținând unei singure frontiere (vârf extrem).

Pornim de la un vârf arbitrar al hărții. Dacă acesta este extrem, aserțiunea este dovedită. Dacă vârful ales nu este extrem, parcurgem o frontieră care îl leagă de un alt vârf. Dacă acest vârf este extrem, demonstrația este terminată. În caz contrar, există o frontieră care ne conduce la un al treilea vârf al hărții. Acest procedeu permite eliminarea vârfurilor neextreme, fără a parcurge de două ori aceeași frontieră. Cum numărul de vârfuri este finit și harta nu conține contururi închise, vom ajunge la un vârf legat numai printr-o frontieră de restul hărții, adică la un vârf extrem. Îndepărtând acest vârf cu unica sa frontieră, obținem o hartă cu L frontiere, $p - 1$ vârfuri și s țări. Conform ipotezei inductive, avem $s + (p - 1) = L + 2$ și deci $s + p = (L + 1) + 2$, ceea ce trebuia dovedit.

b) Harta considerată conține cel puțin un contur închis. Îndepărtând una din frontierele acestui contur, obținem o hartă cu L frontiere, p vârfuri și $s - 1$ țări. Atunci $(s - 1) + p = L + 2$, deci $s + p = (L + 1) + 2$, ceea ce încheie demonstrația.

101. În caz afirmativ, avem o hartă cu $p = 6$ vârfuri, $L = 9$ frontiere, şi conform teoremei lui Euler:

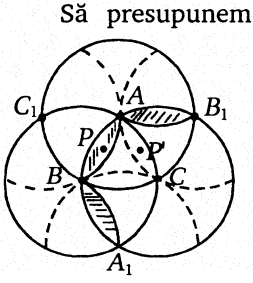
$$s + p = L + 2,$$

numărul de regiuni (țări) formate este $s = 9 - 6 + 2 = 5$. Fiecare țară are cel puțin 4 frontiere, căci nu există nici un drum între două case sau între două fântâni. Prin urmare sunt cel puțin $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ frontiere, contradicție. Răspunsul este negativ.

102. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, dacă o astfel de rețea de drumuri există, atunci ele determină o hartă cu $L = 10$ frontiere și $p = 5$ vârfuri. Din teorema lui Euler avem $s + p = L + 2$, deci harta are $s = 10 + 2 - 5 = 7$ țări. Fiecare țară are cel puțin 3 frontiere; sunt necesare prin urmare cel puțin $\frac{7 \cdot 3}{2} > 10$ frontiere, contradicție.

103. Fie p numărul de vârfuri, s numărul fețelor și l numărul muchiilor poliedrului; avem $s \geq 5$. Vom demonstra că există o față a poliedrului având cel puțin 4 laturi. Presupunând contrariul, deoarece fiecare față ar avea 3 laturi, rezultă că $2l = 3s$. Conform ipotezei, din fiecare vârf al poliedrului pleacă 3 muchii, deci $2l = 3p$, adică $s = p = \frac{2}{3}l$. Din teorema lui Euler avem $l + 2 = s + p$, de unde $l = 6$ și $s = p = 4$, în contradicție cu $s \geq 5$. Prin urmare există o față având cel puțin 4 laturi. Primul jucător își scrie numele pe această față *F*, apoi – după ce al doilea jucător a ales altă față – va alege una din fețele ce au o muchie comună cu *F* și nu are nici o latură comună cu cea aleasă de al doilea. Perechea de fețe aleasă de primul jucător are două fețe adiacente – adică având un vârf comun. Cel de-al doilea jucător nu le poate alege simultan pe acestea, deci primul câștigă.

104. Deoarece mulțimea este finită, există două puncte aflate la distanța maximă; fie *A*, *B* acestea și *C* punctul cu care se obține triunghiul echilateral.



Să presupunem că există un alt punct P al mulțimii; atunci el aparține triunghiului curbiliniu *ABC* format de intersecția discurilor centrate în *A*, *B*, *C* respectiv. (vezi figura și notațiile). Conform ipotezei, rotitul lui *P* în jurul punctului *A* (apoi *B* și *C*) cu 60^0 în sens orar sau antiorar aparține mulțimii, deci triunghiului curbiliniu *ABC*.

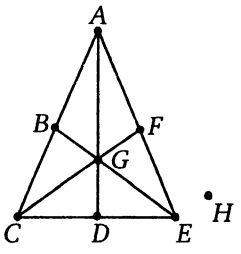
Pentru a fixa ideile, alegem sensul antiorar al rotației, adică *B* ajunge în *C* iar *C* în B_1; altfel spus, triunghiul curbiliniu *ABC* se rotește ajungând peste triunghiul curbiliniu ACB_1. Rezultă că P' - rotitul lui *P* – este simultan în aceste triunghiuri, adică în "lentila" determinată de intersecția discurilor de centre *B* și B_1. Prin urmare *P* se află în lentila formată de discurile de centre *C* și C_1.

Pe de altă parte, rotitul lui *P* în jurul punctului *C* cu 60^0 trebuie să rămână în triunghiul curbiliniu *ABC*. Acest lucru nu mai este posibil, deoarece lentila de capete *A* și *B* ce îl conține pe *P* se rotește în sens orar peste lentila de capete B_1 și *A*, iar antiorar peste lentila de capete *B* și A_1.

Prin urmare mulțimea are exact 3 puncte.

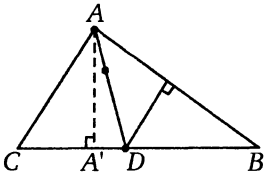
105. Considerăm următoarele 12 submulțimi: *HABC*, *HAGD*, *HAFE*, *HCGF*, *HCDE*, *HBGE* și *AFBG*, *AFCD*, *FEGD*, *FEBC*, *DEAB*, *CDBG*. Se poate verifica relativ ușor că oricare 3 vârfuri ale cubului se găsesc în exact una din submulțimile mai sus enumerate.

Pentru a ușura această verificare – sunt 56 de submulțimi cu 3 elemente! - și, în plus, pentru a oferi o justificare a alegerii celor 12 submulțimi, să considerăm următoarea configurație **plană** a celor 8 vârfuri:



Acum se observă că primele 6 submulțimi sunt obținute din H și **3 puncte "coliniare"** ale configurației triunghiulare considerate, iar următoarele 6 sunt obținute eleminând din cele 7 puncte – A, B, C, D, E, F, G – cele 6 triplete de puncte **"coliniare"**.

106. Vom presupune prin absurd contrariul. Formăm toate triunghiurile posibile – un număr finit! - și considerăm triunghiul având înălțimea minimă; fie acesta ABC și AA' înălțimea minimă.



Conform ipotezei, pe dreapta BC se găsește un alt punct din mulțimea inițială; îl notăm D. Fără a restrânge generalitatea, considerăm D între B și C – altfel renotăm cele 3 puncte B, C, D. Unul din unghiurile $\widehat{ADC}$ și $\widehat{ADB}$ este obtuz; fie acesta $\widehat{ADB}$. Rezultă că în triunghiul ABD înălțimea din D este mai mică decât cea din A; contradicție.

107. Notăm A_i, $i=\overline{1,10}$ zonele din prima împărțire și B_j, $j=\overline{1,10}$ zonele din a doua împărțire. Fie $S_{ij}=A_i\cap B_j$, $i,j=\overline{1,10}$ cele 100 de intersecții ale acestora – unele pot fi vide ! Numărul de colorări posibile ale zonelor B_1, B_2, ..., B_{10} cu 10 culori este $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10=10!$. Pentru o colorare $k\in\{1,2,\ldots,10!\}$, fie s_k suma ariilor zonelor S_{ij} ce sunt colorate pe ambele părți în aceeași culoare. Atunci $s_k=\sum\limits_{i,j-1}^{10}\xi_{ij}\cdot \text{aria}[S_{ij}]$, unde $\xi_{ij}=\begin{cases}1, & \text{dacă } A_i \text{ şi } B_j \text{ sunt la fel colorate}\\ 0, & \text{în caz contrar}\end{cases}$. Rezultă că $\sum\limits_{k'1}^{10}s_k=\sum\limits_{i,j}^{10}p_{ij}\cdot \text{aria}[S_{ij}]$, unde p_{ij} reprezintă numărul de colorări în care zonele A_i și B_j au aceeași culoare. Pentru a determina valoarea lui p_{ij}, să observăm că restul de 9 culori se pot atribui celorlalte porțiuni în $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9=9!$ moduri, deci $p_{ij}=9!$. Atunci $\sum\limits_{k=1}^{10}s_k=9!\sum\limits_{i,j=1}^{10}\text{aria}[S_{ij}]=9!$. Numerele $s_1,s_2,\ldots,s_{10!}$ sunt pozitive și au suma 9!, prin urmare există unul cel puțin egal cu $\frac{9!}{10!}=\frac{1}{10}$, ceea ce trebuia demonstrat.

108. Notăm $A_1A_2\ldots A_{1415}$ poligonul dat.

Vom presupune prin absurd că triunghiurile formate cu trei vârfuri consecutive ale poligonului:

$$A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \ldots, A_{1414}A_{1415}A_1, A_{1415}A_1A_2$$

au aria mai mare sau egală cu 1.

În orice triunghi ABC avem

$$2\text{aria}[ABC] = AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} \leq AB \cdot AC,$$

deci

$$2 \leq 2\text{aria}[A_1A_2A_3] \leq A_1A_2 \cdot A_2A_3$$

și analoagele. Utilizând inegalitatea mediilor, rezultă

$$A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geq 2\sqrt{2},$$

și analog

$$A_2A_3 + A_3A_4 \geq 2\sqrt{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{1414}A_{1415} + A_{1415}A_1 \geq 2\sqrt{2},$$

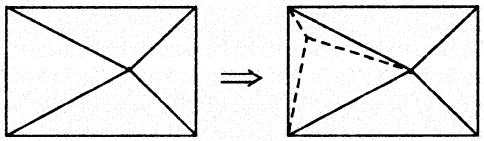
$$A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geq 2\sqrt{2}.$$

Adunând cele 1415 de inegalități rezultă $2(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{1415}A_1) \geq 2\sqrt{2} \cdot 1415 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2001 \geq \sqrt{2} \cdot 1415$. Ridicând la pătrat obținem $4004001 \geq 4004450$, contradicție.

109. Afirmăm că suprafața pătratului poate fi partiționată în suprafețe triunghiulare având vârfurile în mulțimea M. Mai mult, numărul acestor triunghiuri este 4000.

Într-adevăr, considerăm primul punct interior. Unindu-l cu cele 4 vârfuri ale pătratului dat se obțin 4 triunghiuri.

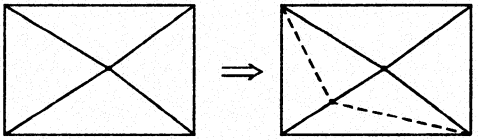
Următorul punct este sau în interiorul unui triunghi, împărțindu-l în alte 3 (vezi figura 1),



4 triunghiuri $\quad$ 6 = 4 + 2 triunghiuri

figura 1

sau pe o latură, caz în care împarte în două ambele triunghiuri adiacente (vezi figura 2).

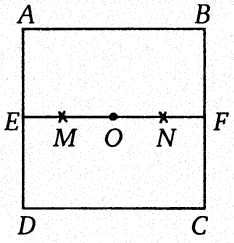


4 triunghiuri $\quad$ 6 = 4 + 2 triunghiuri

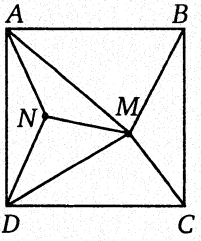
figura 2

În ambele cazuri, numărul de triunghiuri crește cu 2. Pentru fiecare nou punct considerat, numărul de triunghiuri crește, ca în situația prezentată anterior, cu încă 2 triunghiuri. În final se obțin $4 + 2 \times 1999 = 4000$ de triunghiuri. Cum aria pătratului este 400, cel puțin unul din aceste triunghiuri are aria mai mică sau egală cu $\frac{1}{10}$.

110. Fie O centrul pătratului, E, F mijloacele laturilor AD și BC și M, N mijloacele segmentelor OM și ON. Este ușor de verificat că $s(M,N)=\frac{1}{8}$, deci $k \geq \frac{1}{8}$.



Vom arăta că $k = 1/8$. Fie M și N două puncte cu proprietățile din enunț. Punctul N se află în interiorul unuia din cele 4 triunghiuri determinate de punctul M și laturile pătratului; fie AMD acesta.



Să observăm că

$$\text{aria}[AMD]+\text{aria}[BMC]=1/2.$$

Atunci

$$\text{aria}[AND]+\text{aria}[DNM]+\text{aria}[ANM]+\text{aria}[BMC]=1/2,$$

și din cele patru arii din membrul stâng una este cel mult egală cu 1/8. Rezultă că $s(M,N)\leq\frac{1}{8}$, deci $k = 1/8$.

Dinu Șerbănescu

111. Notăm A, B, C, D și E cele 5 puncte date.

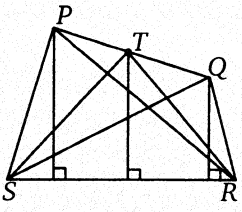
Dacă pentagonul $ABCDE$ e concav, putem considera că punctul D aparține interiorului triunghiului ABC sau patrulaterului cu vârfurile A, B, C, E.

În primul caz, $\text{aria}[ABC]=\text{aria}[ABD]+\text{aria}[DBC]+\text{aria}[DAC]>6>3$. În al doilea caz, D aparține interiorului unuia din triunghiurile ABC, ABE, BCE sau ACE; rezolvarea decurge ca în cazul anterior.

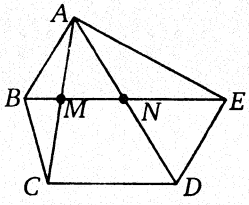
Considerăm cazul pentagonului convex $ABCDE$ și fie M și N punctele de intersecție ale diagonalei BE cu AC și AD, respectiv. Vom folosi următoarea:

Lemă. Fie $PQRS$ un patrulater și T un punct pe latura PQ. Atunci

$$\text{aria}[TRS]\geq\min(\text{aria}[PSR],\text{aria}[QSR]).$$



Soluția se rezumă la a remarca faptul că distanța de la T la SR se află între distanțele de la P și Q la SR.



Revenind la problemă, considerăm cazul $BM\geq\frac{1}{3}BE$, adică $BM\geq\frac{1}{2}ME$.

Atunci

$$\text{aria}[BDE] = \text{aria}[BDM] + \text{aria}[MDE] \geq \frac{1}{2}\text{aria}[MDE] + \text{aria}[MDE] = \frac{3}{2}\text{aria}[MDE] \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}\min(\text{aria}[CDE], \text{aria}[ADE]) > \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Cazul $NE \geq \frac{1}{3}$ se rezolvă similar.

Dacă $MN \geq \frac{1}{3}BE$, atunci:

$$\text{aria}[AMN] \geq \frac{1}{3}\text{aria}[ABE] > \frac{2}{3},$$

$$\text{aria}[MND] \geq \frac{1}{3}\text{aria}[BED] > \frac{2}{3} \text{ și}$$

$$\text{aria}[MCD] \geq \min(\text{aria}[BCD], \text{aria}[ECD]) > 2.$$

Prin sumare rezultă

$$\text{aria}[ACD] > 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} > 3,$$

și demonstrația e completă.

5. DIVERSE

112. Fie r numărul de cărți roşii din primele 26 de cărți; restul de $26 - r$ sunt evident negre. Atunci printre ultimele 26 de cărți sunt $26 - (26 - r) = r$ cărți negre, ceea ce trebuia demonstrat.

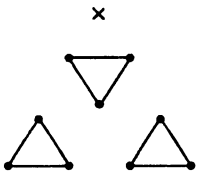
113. O persoană are 0, 1, 2, ..., $n-2$ sau $n-1$ cunoştințe în sală. Să observăm că nu este posibil ca o persoană să aibă $n-1$ cunoştințe iar o alta să aibă 0 cunoştințe; aplicând principiul cutiei problema este rezolvată.

114. Sunt 10 triunghiuri; suma numerelor scrise pe laturile acestora este $3(1+2+3+...+10) = 3 \cdot 55 = 155$. Rezultă că suma numerelor scrise pe laturile unui astfel de triunghi trebuie să fie $\frac{33}{2} \notin \mathbb{Z}$, fals. Prin urmare nu există o astfel de numerotare.

115. Nu. Într-adevăr, presupunând contrariul, fie s suma comună celor 8 vârfuri. Atunci $8 \cdot s = 2(1+2+3+...+12)$, deoarece fiecare muchie este numerotată de două ori, câte o dată pentru fiecare capăt. Rezultă că $s = \frac{2 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2}}{8} = \frac{39}{2}$, contradicție.

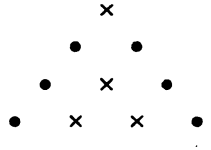
116. Trebuie şterse 4 puncte.

Într-adevăr, să observam că din cele 3 puncte aflate în colțuri trebuie şters măcar unul, fie acesta cel de sus. Unim celelalte 9 rămase astfel:



Cel puțin un punct din fiecare triunghi echilateral "mic" trebuie eliminat; prin urmare trebuie şterse cel puțin 4 puncte.

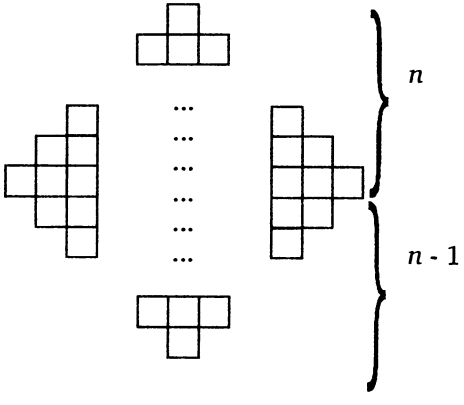
Să arătăm că putem şterge 4 în condițiile problemei. Într-adevăr, cele 6 puncte din figura



nu pot forma un triunghi echilateral.

117. 1. Numărând pătratele din figurile prezentate (1, 2, 3 şi 4) observăm că avem 1, 4, 9 și respectiv 16 pătrate. Este natural să presupunem că în figura numărul n vor fi n^2 pătrate. Pentru justificare, să observăm din modul de generare a figurilor – că fiecare figură are n linii orizontale, pe acestea aflându-se câte 1, 3, 5, ..., $2n-1$ pătrate respectiv; în total $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

2. Figura numarul n se obține din figurile "triunghiurilor" n și $n-1$ de la punctul precedent, a doua fiind răsturnată:



Avem prin urmare $n^2+(n-1)^2$ pătrate.

118. Este suficient să colorăm inițial întregii 0, 1, 2, 3, și 4; acest lucru este posibil în $2^5=32$ de moduri. Numerele 5, 6, 7, 8 și 9 sunt în culoarea opusă numerelor 0, 1, 2, 3, 4 respectiv. Din ipoteză, n și $n+10$ au aceeași culoare, deci orice număr întreg va avea în mod necesar culoarea restului la împărțirea cu 10. Prin urmare colorarea e unic determinată de colorarea numerelor 0, 1, 2, 3, 4.

119. Un elev are 4 coechipieri în fiecare săptămână și 24 de colegi. Este posibil ca $6=\frac{24}{4}$ săptămâni el să nu facă pereche cu un alt coleg; după 7 săptămâni acest lucru este inevitabil.

120. Da ! Să notăm cu A, B, C, D cei patru oameni astfel încât A traversează tunelul într-un minut iar B, C, D în 2, 5, 10 minute respectiv.

Mai întâi trec prin tunel A și B, A întorcându-se înapoi cu torța. S-au consumat $2+1=3$ minute. Vor trece tunelul apoi C și D și B se întoarce cu torța; încă $10+2=12$ minute sunt consumate. În sfârșit, A și B traversează din nou în 2 minute tunelul; în total $2+1+10+2+2=17$ minute.

Observație. Timpul minim necesar este într-adevăr de 17 minute. Sunt necesare 5 traversări, 3 din ele cu 2 persoane și 2 "întoarceri" ale unei persoane. Cele 2 întoarceri nu pot fi făcute doar de persoana A decât dacă trecerile "directe" sunt A și B, A cu C și A cu D, ceea ce ar necesita $2+5+10=17$ minute plus $1+1=2$ minute pentru întoarcerile lui A; timpul ar fi de 19 minute. Astfel întoarcerile necesită măcar $1+2=3$ minute iar cele 3 "directe" cel puțin $10+2+2=14$ minute.

121. Sunt suficiente 4 greutăți de 1, 3, 9, 27 kg. Pentru a demonstra suficiența, trebuie arătat că orice $n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 40$ poate fi scris sub forma $a\cdot 1+b\cdot 3+c\cdot 9+d\cdot 27$, pentru o alegere convenabilă a numerelor $a,b,c,d\in\{-1,0,1\}$. De exemplu, $2=3-1$, adică un obiect de 2 kg poate fi cântărit punându-l în același talger cu greutatea de 1 kg, iar în celălalt taler punând greutatea de 3 kg. Avem

$1=1$
$2=3-1$
$3=3$
$4=3+1$
$5=9-3-1$
$6=9-3$
$7=9-3+1$
$8=9-1$
$9=9$
$10=9+1$
$11=9+3-1$
$12=9+3$
$13=9+3+1$
$14=27-9-3-1$
$15=27-9-3$
$16=27-9-3+1$
$17=27-9-1$
$18=27-9$
$19=27-9+1$
$20=27-9+3-1$
$21=27-9+3$
$22=27-9+3+1$
$23=27-3-1$
$24=27-3$
$25=27-3+1$
$26=27-1$
$27=27$
$28=27+1$
$29=27+3-1$
$30=27+3$
$31=27+3+1$
$32=27+9-3-1$
$33=27+9-3$
$34=27+9-3+1$
$35=27+9-1$
$36=27+9$
$37=27+9+1$
$38=27+9+3-1$
$39=27+9+3$
$40=27+9+3+1$

ceea ce demonstrază suficiența.

Pentru a demonstra necesitatea, trebuie să arătăm că doar 3 greutăți nu sunt suficiente. Să observăm că greutatea de 1 kg e necesară; pentru a cântări 2 kg ne este necesară sau o greutate de 2 kg sau cea de 3 kg de mai sus. Pentru a cântări 5 kg avem nevoie de o greutate de cel mult $5+3+1=9$ kg. Cu 1, 2, 3 kg nu putem cântări mai mult de $1+3+9=13$ kg, deci avem nevoie de cel puțin 4 greutăți.

122. Ideea câștigătoare a primului jucător este următoarea: înaintea ultimei mutări ale celui de-al doilea, pe masă trebuie să se afle 11 chibrituri. Într-adevăr, aceasta trebuie să ridice între 1 și 10 chibrituri, lăsând pe masă între 10 și 1 chibrituri, pe care primul le poate lua (în întregime).

Cum $11\cdot 13=143$ și $150-143=7$, prima mișcare a primului jucător este să ridice 7 chibrituri. Al doilea va lua $k\in\{1,2,...,10\}$ chibrituri, iar primul $11-k$, lăsând pe masă $143-11=132=11\cdot 12$. Vor urma apoi duble mutări de tipul k și $11-k$, pe masă rămânând succesiv $11\cdot 11$, $11\cdot 10$, $11\cdot 9$, ..., $11\cdot 2$, 11 chibrituri. Astfel se obține poziția dorită.

123. Să observăm că o persoană nu se cunoaște cu cel mult $99-67=32$ persoane din sală. Fie A o persoană. Persoanele necunoscute lui A părăsesc sala și rămânem cu cel puțin 68 de persoane. Alegem dintre acestea o persoană B și după ce persoanele necunoscute acesteia pleacă, rămân cel puțin $68-32=36$ de persoane. Fie C una dintre acestea și invităm să plece persoanele necunoscute lui. Rămân cel puțin $36-32=4$ persoane, din care îl alegem pe D. Este evident că A, B, C, D se cunosc reciproc și deci problema este încheiată.

124. Vom presupune contrariul. Fie A și B doi participanți care nu se cunosc. Considerăm X și Y alți doi participanți; dintre A, B, X, Y, există–conform ipotezei-unul care se cunoaște cu ceilalți trei. Acesta nu poate fi A sau B; fără a restrânge generalitatea putem considera că acesta este X. Fie M un alt participant și mulțimea $\{A, B, X, M\}$. Unul dintre X sau M îi cunoaște pe ceilalți; dacă M este acesta, atunci X și M se cunosc. Dacă X e acesta, din nou X și M se cunosc. Rezultă că X cunoaște toți participanții, ceea ce reprezintă o contradicție. Prin urmare problema este rezolvată.

125. Din cele 9 muchii laterale există cel puțin 5 laterale cu aceeași culoare. Fixând una dintre acestea observăm că putem alege 2 din celelalte rămase astfel încât capetele acestor trei muchii ce pornesc din vârf să nu fie vârfuri consecutive ale bazei. Aceste 3 vârfuri sunt unite prin diagonale ce trebuie să aibă culoarea opusă cu a muchiilor laterale pentru a se evita formarea unui triunghi monocolor. În această situație diagonalele sunt la fel colorate și problema este rezolvată.

Sever Moldoveanu

126. Să presupunem prin absurd că una din baze are laturile colorate cu ambele culori. Există prin urmare două laturi consecutive colorate diferit; fie, de exemplu, A_1A_2 roșie și A_2A_3 albastră.

Din cele 5 segmente A_2B_i există două colorate la fel și având capetele în vârfuri consecutive ale bazei B; fie de exemplu A_2B_1 și A_2B_2 colorate cu roșu. Atunci A_1B_1, A_1B_2 și B_1B_2 trebuie să fie albastre, altfel ar "închide" un triunghi roșu; în acest fel triunghiul $A_1B_1B_2$ este albastru, ceea ce contrazice ipoteza.

Să presupunem că ambele baze au laturile monocolore, dar baza A e roșie iar B este albastră. Analog vom găsi între segmentele A_2B_i două colorate la fel și având capetele consecutive; fie acestea A_2B_1 și A_2B_2. Dacă ele ar fi albastre, atunci triunghiul $A_2B_1B_2$ ar fi monocolor, deci ele sunt roșii, ca și A_1A_2. Am obținut situația analizată anterior și demonstrația este încheiată.

127. Orice literă apare într-un cuvânt de cel mult 3 ori. Într-adevăr, dacă o literă α ar apărea de 4 ori,

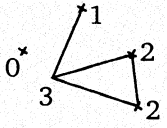
$$\ldots \underbrace{\alpha \ldots \alpha \ldots \alpha \ldots \alpha} \ldots$$

atunci între prima și ultima literă α ar apărea o pereche (α, α) de litere identice; contradicție. Prin urmare un cuvânt are cel mult $3 \cdot 33 = 99$ de litere și răspunsul este negativ.

128. Dacă n este par și efectuăm n operații, lăsând nemișcat pe rând câte unul din cele n pahare, atunci după ultima operație fiecare pahar a fost întors de $n-1$ ori. Cum $n-1$ este impar, rezultă că toate paharele au fost răsturnate.

Dacă n este impar, vom asocia unui pahar cu gura în sus numărul $+1$ și unuia răsturnat numărul -1. Produsul numerelor în poziția inițială este 1. La o operație, unui număr par $-n-1-$ de pahare li se schimbă semnul numărului asociat; prin urmare produsul numerelor tuturor paharelor se înmulțesc cu $(-1)^{n-1} = 1$, deci rămâne tot 1. În poziția finală produsul numerelor ar fi $(-1)^{n-1} = -1$; în consecință această poziție nu poate fi obținută.

129. Fie n numărul segmentelor configurației și să asociem fiecărui punct un număr natural care reprezintă numărul segmentelor care au un capăt în punctul dat. De exemplu:



; $n = 4$.

Vom obține k numere impare – fie acestea $a_1, a_2, ..., a_k$ - și restul pare – fie acestea $b_1, b_2, ..., b_m$. Avem de demonstrat că numărul k este par.

Deoarece $(a_1 + a_2 + ... + a_k) + (b_1 + b_2 + ... + b_m) = 2n$ – fiecare segment al configurației este numărat de două ori ! – rezultă că $a_1 + a_2 + ... + a_k$ este număr par. Ținând cont de faptul că $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt impare, rezultă că k este par, ceea ce trebuia demonstrat.

130. Fie A și B cei doi bunici ai unuia dintre elevi și $k \geq 1$ numărul nepoților acestora din clasă. Ceilalți $20 - k$ elevi au – conform ipotezei – unul din bunicii A sau B. Notăm cu n numărul nepoților bunicului A care nu sunt nepoți ai lui B (cei n sunt printre cei $20 - k$, deci $n \leq 20 - k$). Rămân $20 - k - n$ nepoți ai lui B care nu sunt nepoți ai lui A. Fixăm un elev din cei n și fie C celălalt bunic – altul decât A. El are împreună cu oricare din cei $20 - k - n$ elevi un bunic comun; acesta este în mod necesar C. Fie acum un elev din cei $20 - k - n$; împreună cu oricare din cei n el are în comun bunicul C. Rezumând, avem 3 bunici A, B, C, fiecare având $k + n$, $k + (20 - k - n) = 20 - n$, $20 - k$ nepoți. Cum $(k + n) + (20 - n) + (20 - k) = 40$, unul din termenii acestei sume este cel puțin 14, ceea ce rezolvă problema.

131. Notăm cu n numărul fetelor. Atunci $2n$ este numărul băieților, $3n$ este numărul participanților și $\frac{3n(3n-1)}{2}$ este numărul total al meciurilor. Numărul de victorii ale băieților reprezintă $\frac{5}{12}$ din total, deci $\frac{5}{12} \cdot \frac{3n(3n-1)}{2} = \frac{5n(3n-1)}{8}$.

Meciurile jucate între băieți au fost $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ și sunt considerate ca victorii ale băieților. Prin urmare $\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow 15n - 5 \geq 16n - 8 \Leftrightarrow 3 \geq n$.

În plus, $\frac{5n(3n-1)}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 8 \mid n(3n-1)$. Analizând cazurile $n = 1$, $n = 2$ și $n = 3$ rezultă că $n = 3$ și deci numărul de participanți este 9.

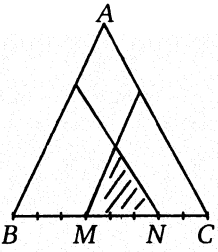
132. Să presupunem prin absurd că $n \leq 3$ și să considerăm numerele 0, 2, 3, 5. Deoarece $|0 - 2|, |0 - 3|, |0 - 5| \in \{2, 3, 5\}$, conform ipotezei rezultă că numerele 2, 3, 5 au altă culoare decât 0. Cum $|5 - 2|, |5 - 3| \in \{2, 3, 5\}$, rezultă că 2, 3 au altă culoare decât 5, deci $n = 3$ și numerele 2 și 3 au aceeași culoare. Repetând raționamentul pentru secvența 1, 3, 4, 6 obținem analog că 3 și 4 au aceeași culoare. Atunci numerele 2 și 4 au aceeași culoare, dar $|2 - 4| = 2 \in \{2, 3, 5\}$; contradicție.

Ioan Tomescu

133. Vom rezolva problema în cazul general, notând cu a_n numărul de triunghiuri echilaterale din configurația generată de împărțirea fiecărei laturi a triunghiului inițial în n segmente egale.

Considerăm un triunghi echilateral ABC cu laturile împărțite în $n+1$ segmente egale și ducem cele n paralele la fiecare din laturile sale. Vom număra toate triunghiurile echilaterale având cel puțin un vârf pe latura BC; celelalte sunt în număr de a_n.

Considerăm triunghiurile având 2 vârfuri pe latura BC. Când alegem 2 puncte de diviziune ale laturii BC – fie ele M și N, determinăm exact un triunghi echilateral, cel obținut ducând paralelele din M și N la AB și AC. Prin urmare sunt $C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ triunghiuri.



Considerăm acum triunghiurile având exact un vârf pe latura BC. Să observăm că fiecărui punct de diviziune interior segmentului BC îi corespunde un triunghi de latură 1, deci obținem n triunghiuri. Există $n-2$ triunghiuri de latură 2, corespunzătoare celor $n-2$ puncte de diviziune aflate la cel puțin 2 segmente de capetele B și C ș.a.m.d. În total avem $n+(n-2)+(n-4)...$ triunghiuri.

În concluzie, $a_{n+1} = a_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + n + (n-2) + (n-4) + \ldots$. Înlocuind n cu $n+1$, rezultă $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + (n+1) + (n-1) + (n-3) + \ldots$. Prin sumare obținem $a_{n+2} = a_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + (n+1) + n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 =$

$= a_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = a_n + \frac{(n+2)(3n+5)}{2}$.

Pentru $n = 10$, $a_{10} = a_8 + \frac{10(3\cdot 8+5)}{2} = a_8 + 145 = a_6 + 237 = \ldots = a_0 + 315 = 315$.

Dinu Șerbănescu

134. Să observăm că avem 10 perechi de matematicieni și deci 10 intervale de timp în care ambii matematicieni ai unei perechi dormeau. Vom presupune prin absurd că nu există nici un moment în care 3 matematicieni dormeau; prin urmare cele 10 intervale considerate sunt disjuncte. Pentru că fiecare din cei 5 matematicieni a adormit de 2 ori, sunt 10 momente în care unul din ei a adormit; aceste momente sunt cele 10 capete din stânga ale celor 10 intervale considerate. În momentul derulării primului interval – în care 2 matematicieni dormeau – se consumaseră deja 2 momente din cele 10 – este vorba de momentele în care cei doi au adormit. Ne mai rămân 8 momente cu care să înceapă cele 9 intervale comune rămase; contradicție.